

## РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Андрей Стефанов Андреев

за дисертационния труд

на тема „Сходимост на итерационния метод на Халей за индивидуална и  
едновременна апроксимация на нули на полиноми“

с автор Стоил Иванов Иванов

за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ по:

област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление 4.5. Математика;

докторска програма Математически анализ.

Със заповед №Р33–854/28.02.2014 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ съм определен за член на научното жури във връзка с процедурата за защита на дисертационния труд на тема „Сходимост на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми“ за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Математически анализ от Стоил Иванов Иванов – редовен докторант към катедра „Математически анализ“ на Факултет по математика и информатика (ФМИ) при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“.

Като член на научното жури на СД и на хартиен носител съм получил:

1. Молба от Стоил Иванов Иванов до Ректора на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ за разкриване на процедура за защита на дисертационен труд;
2. Творческа автобиография и копие от диплома за завършено висше образование с придобита образователно–квалификационна степен „магистър“ с приложение;
3. Заповеди за записване в докторантура, за провеждане на изпит от индивидуалния план, за промяна на тема, за разширяване на Катедрения съвет (КС) за предварително обсъждане и за отчисляване от докторантура;
4. Протокол за издържан изпит по специалността от индивидуалния план;

5. Протоколи от КС за откриване на процедура за предварително обсъждане на дисертационния труд и от предварителното обсъждане;
6. Списъци на всички научни трудове и участие в проекти, на забелязаните цитирания, на научните трудове по темата на дисертационния труд;
7. Дисертационен труд с декларация за оригиналност;
8. Автореферат;
9. Копия на научните трудове по темата на дисертационния труд;
10. Справка за спазване на специфичните изисквания на ФМИ по Правилника за развитието на академичния състав на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ (ПРАС на ПУ).

Представеният от Стоил Иванов дисертационен труд съдържа 115 страници, и представлява детайлно изследване на метода на Халей в различни негови модификации. Този итерационен метод е предложен преди повече от 300 години за намиране на корен на нелинейно уравнение с кубичен порядък на сходимост. В сравнение с по-известния метод на Нютон, който използва допирателна права при пресмятане на следващото приближение, методът на Халей ползва допирателен полином от втора степен и съответно скоростта на сходимост от квадратична става кубична. Интересно е, че това на пръв поглед „елементарно” обобщение на метода на Нютон привлича вниманието на десетки известни специалисти в областта на численото пресмятане на корените на уравненията. В този смисъл тематиката и съдържанието на дисертационния труд са актуално изследване в област, по която се работи активно понастоящем и съответства напълно на професионалното направление и специалността.

За качеството на получените резултати може да се съди по приложените публикации. Докторантът има три съвместни с научния си ръководител статии в списания, от които 2 са с импакт фактор. Общият импакт фактор е 0.899. Той има още една извън тематиката на дисертацията. Резултатите също така са докладвани на 4 научни форума и по този начин са били предмет на обсъждане от специалистите в тази област.

Дисертацията се състои от увод, три глави и заключение. Ще се спра по отделно на всяка част:

- **Увод**

На 27 страници докторантът е представил историята на метода на Халей, неговата актуалност и резултатите, получени в дисертацията. От начина на

написването на увода оставам с впечатлението, че авторът познава в детайли резултатите в тази област и е в състояние да използва идеите и математическата техника, които други автори прилагат при доказване на теореми, свързани с метода на Халей и в общност с теорията и приложенията на итерационните алгоритми. Не е пропуснал да отбележи и българската следа – резултата на Обрешков от 1963 год., който за първи път е модифицирал метода на Халей за да работи в случай на кратни корени (обобщен през 1977 от Хансен и Патрик).

- **Първа глава**

В тази глава се изследва сходимостта на метода на Халей в случай на кратни нули на полином, когато кратностите са известни. Както беше казано по-горе с тази задача са се занимавали редица математици. Докторантът използва подхода на Проинов за намиране на кратни нули на полиноми по метода на Нютон и по-специално неговия резултат за сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар (проста итерация). Използвайки редица лемми (някои от тях са зависимости между полинома и производните му) в Теорема 1.6 се доказва сходимост на метода на Халей при по-добри начални условия от известните и са доказани следните априорна

$$|z_k - \xi| \leq \lambda^{\frac{3^k - 1}{2}} |z_0 - \xi|, \quad 0 < \lambda < 1, \xi \text{ е } m \text{ кратен корен,}$$

и апостериорна оценки

$$|z_{k+1} - \xi| \leq C |z_k - \xi|^3,$$

които очевидно са с кубична скорост на сходимост. Като следствие от априорната оценка следва, че за полином от степен  $n$ , за който  $\xi$  е  $m$  кратна нула и  $z_0$  удовлетворява определени начални условия то за редицата на Халей е изпълнено

$$|z_k - \xi| \leq 2^{\frac{1-3^k}{2}} |z_0 - \xi|.$$

Докторантът доказва и два резултата за метода на Халей (теорема 1.11 и 1.12), които са аналог на резултати на Проинов за намиране на  $m$  кратна нула на полином по метода на Нютон, при това, освен, че скоростта на сходимост е кубична, но и областта на сходимост е по-голяма. Ще отбележа, че получената оценка

$$|z_k - \xi| \leq \theta^k \lambda^{\frac{3^k - 1}{2}} |z_0 - \xi|, \quad 0 < \theta \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \theta \lambda < 1,$$

е с кубична скорост на сходимост и дава възможност за по-прецизни изследвания. Като цяло проличава сериозното навлизане на автора в изследвания математически проблем, а също така и доброто подреждане на материала.

- **Втора глава**

В тази глава се изследва сходимостта на една модификация на метода на Халей за нули на полиноми с неизвестни кратности, което на практика е най-често срещаният случай. Съвместно с научния си ръководител докторантът е успял да формулира и докаже нови резултати за локална сходимост и да намери условия за началните приближения. По-точно - доказани са интересните Теорема 2.1 и Теорема 2.3 за локална сходимост на един модифициран метод на Халей (редица на Шрьодер) за нули с неизвестни кратности с използване на два типа начални апроксимации. Получените априорни оценки от вида  $|z_k - \xi| \leq q^{2^k - 1} |z_0 - \xi|$ , показват, че цената за това, че кратността на нулата  $\xi$  не е известна, рефлектира в понижаване на реда на сходимост от 3 на 2, което съответства на случая, когато се прилага метода Нютон, където понижението на реда на реда сходимост е от 2 на 1. От последната оценка следва, според терминологията на Смейл, че при  $z_0$  достатъчно близко до  $\xi$ , може да изберем  $q=1/2$ , т.е., такова начално приближение  $z_0$  е приближена нула от втори вид. Апостериорната оценка в Теорема 2.3 за редицата на Шрьодер очаквано има също квадратичен порядък на сходимост.

- **Трета глава**

В тази глава итерационният метод на Халей е послужил за база за създаване на метод за едновременна апроксимация на всички нули на даден полином над произволно нормирано поле в случай на прости нули. По принцип всеки итерационен метод за намиране нули на полиноми може да се модифицира в метод за едновременното им намиране. Такъв е случаят с класическия метод на Вайерщрас и за мене остава неясно защо докторантът пише, че е бил мотивиран за тези изследвания от работата на Батра от 2002 г., която се отличава от другите изследвания за едновременно намиране на корени на полином по метода на Нютон само с условията за полулокална сходимост. Начинът, по който са представени формулираните теореми показва обстойна и продължителна работа по изследвания проблем. Трябва

да се отбележи изрично, че сериозното придвижване в тази насока се дължи на предшестващи резултати, получени от проф. П. Проинов.

Много интересна е Теорема 3.1 от Глава 3, с която се подобрява съществуващ резултат по отношение на област на приложимост на класическия метод на Халей за едновременна апроксимация на нули на полином.

Доказаната в равномерна метрика локална оценка с кубична скорост на сходимост в Теорема 3.1 се базира на полученото представяне в Лема 3.1,

$$\frac{f'(x_i)}{f(x_i)} - \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)} = \frac{1 + \sigma_i}{x_i - \xi_i}, \quad f(\xi) = 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \sigma_i = \sigma_i(x_i, \xi_i),$$

на дясната страна на итерационната формула на Халей и направения избор за условията, на които отговаря функцията на началните приближения  $x^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ ,

$$E(x^0) < \frac{2}{n+1+\sqrt{(n-1)(5n-1)}}, \quad E: R^n \rightarrow R^+.$$

Теорема 3.2 обобщава в известен смисъл този резултат, тъй като кубичната скорост на сходимост е доказана в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , метрика.

Използвайки оценка на Проинов, даваща възможност от оценки за локална сходимост да се получават оценки за полулокална сходимост, докторантът доказва теорема за полулокална сходимост в равномерна норма на метода на Халей, Теорема 3.4, която е с компютърно проверяеми начални условия.

Дадените числени приложения, в параграф 3.6, на този метод за 4 полиноми от 3 до 9 степен илюстрират ефективността на подхода. Изведеното условие, което гарантира прости нули на полинома и коректност на итерационната редица от последователни приближения в различните примери се получава на различни стъпки – при полинома от 9 степен на 6 итерация.

- **Автореферат**

Има обем 31 страници, отразява точно съдържанието на дисертацията, целите на изследването и новите резултати, получени в дисертацията.

- **Критични бележки** Няма

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ:**

Оценката ми за дисертационния труд, автореферата, научните публикации и научните приноси на Стоил Иванов Иванов е **положителна**.

Представеният дисертационен труд отговаря напълно на всички изисквания, условия и критерии по Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, ПРАС на ПУ и специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ по ПРАС на ПУ.

Постигнатите резултати ми дават основание да предложа да бъде присъдена образователната и научна степен „**доктор**“ на Стоил Иванов Иванов по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Математически анализ.

**доц. д-р Андрей Андреев**

17.04.2014

София

г.