ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА “АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ”

Велика Николаева Кунева

МУЛТИПЛИКАТИВНИ ГРУПИ НА КОМУТАТИВНИ ГРУПОВИ АЛГЕБРИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен “доктор” в област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, докторска програма Алгебра и теория на числата

Научен ръководител: проф. дмн Тодор Желязков Моллов

Пловдив, 2012 г.

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА “АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ”

Велика Николаева Кунева

МУЛТИПЛИКАТИВНИ ГРУПИ НА КОМУТАТИВНИ ГРУПОВИ АЛГЕБРИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен “доктор”
в област 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
докторска програма Алгебра и теория на числата

Научен ръководител: проф. дмн Тодор Желязков Моллов

Пловдив, 2012 г.

Дисертационият труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра "Алгебра и геометрия" при Факултета по математика и информатика на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски".

Дисертационният труд "Мултипкликативни групи на комутативни групови алгебри" съдържа 84 страници. Изпозваната литература включва 81 източника на латиница. Списъкът на авторските публикации се състои от 5 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 13.12.2012 г. от 13:00 в заседателната зала на новата сграда на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" пред научно жури в състав:

1. проф. д-р Керопе Чакърян
2. проф. д-р Никола Зяпков
3. доц. д-р Пламен Сидеров
4. проф. дмн Нако Начев
5. проф. дмн Тодор Моллов

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330, всеки ден от 8:30 до 17:00 часа.

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на проблема

Груповата алгебра е алгебрична структура, при която от даден пръстен R и дадена група G се образува нов пръстен RG, който е и алгебра над полето R, наречена накратко групова алгебра или групов пръстен. Групите, които се разглеждат в дисертацията, са записани мултипликативно. Групова алгебра, според Карпиловски [K1, стр. 9], може да се дефинира по следния начин.

Нека G е група и R е пръстен. *Групова алгебра (групов пръстен)* RG *на* G *над* R е свободен R-модул с базис G и с умножение, индуцирано от умножението в G.

Следователно RG се състои от всички крайни линейни комбинации

$$x = \sum_{g \in G} x_g . g, \qquad x_g \in R,$$

при което операциите събиране и умножение, и умножение на елементи от RG с елемент от R се дефинират по естествен начин.

Теорията на груповите алгебри, т.е. на груповите пръстени възниква през 40-те години на XX век. Тази теория се използва в съвременната математика и физика в някои теоретични изследвания. Груповите алгебри навлязоха и в някои приложни изследвания и по-конкретно в теория на кодовете, изправящи грешките, в теория на обработката на дискретните сигнали и др. Например използваните в практиката циклични кодове са идеали на груповата алгебра на циклична група над крайно поле. В теорията на обработката на дискретните сигнали всеки дискретен сигнал е n-мерен вектор и се разглежда като елемент на групова алгебра на група от n елемента.

Основни направления в теорията на груповите алгебри, без да имаме претенции за пълнота, са следните:

1) проблемът за изоморфизма на груповите алгебри, т.е. намиране на пълна система инварианти на груповата алгебра;

2) структура на мултипликативната група на груповата алгебра;

3) теоретико-групови свойства на груповите алгебри;

4) теоретико-пръстенови свойства на груповите алгебри.

Настоящата дисертация е посветена на направленията 2) и 3), отнесени за комутативни групови алгебри, а именно на установяване на структурата на мултипликативната група и на получаване на теоретико-групови свойства на тези алгебри.

Цели и задачи на дисертационния труд

Дисертационният труд е посветен на структурата на мултипликативната група и на теоретико-груповите свойства, отнесени за комутативни групови алгебри. Основните цели са следните:

1) описание на силовската p-подгрупа $S(RG)$ на нормираната мултипликативна група $V(RG)$ на груповата алгебра RG, с точност до изоморфизъм, когато G е крайна абелева p-група и R е директно произведение на комутативни неразложими пръстени с единица, така че p е обратим елемент в R;

2) описание на максималната делима подгрупа $dV(RG)$ на $V(RG)$, с точност до изоморфизъм, когато G е p-смесена абелева група и R е директно произведение на m неразложими пръстени с проста характеристика $p \quad (m \in \mathbb{N})$;

3) ако G е директен множител на $V(RG)$, то да се посочат необходими и достатъчни условия $V(RG)/G$ да е p-група;

4) установяване на някои свойства на мултипликативните групи на групови алгебри;

5) корекция на някои формулировки и доказателства на резултати на П. Данчев.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, четири параграфа, заключение, списък от 5 публикации по темата на дисертацията, библиография от 81 източника на латиница, означения и съдържание. Общият обем на дисертационния труд е 84 страници.

Кратко съдържание на дисертационния труд

§1. Силовска p-подгрупа на комутативна групова алгебра на крайна абелева p-група над неразложим пръстен, в който p е обратим елемент

Нека G е абелева p-група и K е поле, с характеристика, различна от p. Берман и Роса [BR, BR1] дават описание на периодичната част $tV(KG)$ на $V(KG)$, когато G е изброима абелева p-група и K е поле. Нека R е комутативен пръстен с единица, така че характеристиката на R не дели редовете на елементите на G. Начев [N1, N2] дава описание на периодичната част $tV(RG)$ на $V(RG)$, когато G е абелева p-група и R съдържа p^n-тите корени на единицата, $n \in \mathbb{N}$. Карпиловски [K, 5.2.5 Теорема, стр.126] определя изоморфния клас на $U(\mathbb{Q}G)$, когато G е крайна породена абелева група.

Дефинираме

$$G^{p^n} = \{g^{p^n} | \quad g \in G\},\ n \in \mathbb{N},\ G^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} G^{p^n}.$$

Означавме с $|M|$ мощността на множество M, с $\coprod_{\alpha} G$ – копроизведението на α копия на G, където α е кардинално число. Очевидно G^1 е подгрупа на G, която се нарича *подгрупа на G от елементи с безкрайна височина в G*. Моллов в [M5] дава пълно описание на групата $S(KG)$, когато G е произволна абелева p-група и K е поле от втори род спрямо p. Когато полето K е поле от първи род спрямо p, то в същата работа е дадено следното разлагане

$$S(KG) \cong S^1(KG) \times S(K(G/G^1)),$$

където

$$S^1(KG) \cong \coprod_{|G|} Z(p^{\infty}),$$

когато $G^1 \neq 1$, и $S^1(KG) = 1$, когато $G^1 = 1$. Следователно описанието на $S(KG)$ се свежда до описанието ѝ, когато G е сепарабелна група. В последния случай в [M7] са изчислени инвариантите на Улм-Каплански на $S(KG)$. Моллов [M1-M3, M5-M7] описва периодичната част $tV(RG)$ на $V(RG)$, когато G е абелева група и R е поле. Освен това Моллов [M4] дава описание на групата $V(RG)$, когато (i) G е копроизведение на циклични групи и R е крайно разширение на полето на рационалните числа и (ii) G е абелева p-група и $R = \mathbb{R}$. В [M6] Моллов установява структурата на периодичната подгрупа на $V(RG)$, с точност до изоморфизъм, когато R е поле с характеристика различна от p и G е крайна абелева p-група.

Чатзидакис и Папас [ChP] описват изоморфния клас на $U(RG)$, когато периодичната абелева група G е директна сума на изброими групи и R е поле, характеристиката на което не дели редовете на елементите на G. Начев и Моллов [NM1, NM2] описват $U(RG)$, с точност до изоморфизъм, когато G е абелева p-група и поне едно от следните условия (a) или (b) е изпълнено:

(a) първият Улмовски фактор G/G^1 на G е директна сума на циклични групи и R е поле от първи род спрямо p;

(b) R е поле от втори род спрямо p.

Ако R е директно произведение от m неразложими пръстени $R_i \quad (m \in \mathbb{N})$, Моллов и Начев [MN] установяват структурата на мултипликативната група $U(RG)$ на RG в следните случаи:

(a) когато R_i е пръстен с проста характеристика p_i, tG/G_{p_i} е крайна и експонентата на tG/G_{p_i} принадлежи на R_i^*;

(b) когато R_i е с характеристика нула, R_i няма нилпотентни елементи, tG е крайна с експонента n и $n \in R_i^*$.

В [M6] Моллов установява структурата на периодичната подгрупа на $V(RG)$, когато R е поле с характеристика различна от p и G е крайна абелева p-група. Ще разгледаме по-детайлно случая за описание на силовската p-подгрупа $S(KG)$, когато G е крайна абелева p-група и K е поле с характеристика, различна от p. Тогава груповата алгебра KG на G над K е полупроста, т.е. нейният радикал $J(KG)$ на Джекобсон е равен на нула. Моллов и Начев [MN3] дават пълно описание, с точност до изоморфизъм на групата $U(RG)$, когато R е безкрайно директно произведение на комутативни неразложими пръстени с единица, G е крайна абелева група и експонентата на G е обратим елемент в R (Теорема 3. 4 на [MN3]). (Ще отбележим, че този резултат, а също и резултатът за $U(RG)$ в споменатата работа [MN] на Моллов и Начев е даден в термините на мултипликативните групи на разширения на пръстена R, и следователно са незавършени и подлежат на допълнително изследване). Както споменахме, структурата на $S(KG)$, когато G е крайна абелева p-група, е дадена от Моллов [M6], благодарение на следните резултати. Добре известно е, че KG се разлага в директна сума на разширения $K(\varepsilon_i)$ на полето K, където ε_i е примитивен p^i-ти корен на единицата, т.е. корен на циклотомичния полином $\Phi_{p^i}(x)$.

Моллов в [M3], а също и в [M5], въвежда понятието спектър $s_p(K)$ на полето K спрямо простото число p, а именно

$$s_p(K) = \{i \in \mathbb{N}_0 | K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{i+1})\}. \tag{1}$$

Освен това в [M6] той намира броя δ_i на полетата $K(\varepsilon_i)$ $(i \in s_p(K))$, в разлагането на KG в директна сума на полета, т.е. получава директното разлагане

$$KG \cong \dot{\sum_{i \in s_p(K)}} \delta_i K(\varepsilon_i), \tag{2}$$

където δ_i е определено число от $\mathbb{N}_0$. Това дава възможност да се получи структурата на периодичната част $tV(KG)$ на $V(KG)$, когато G е крайна абелева p-група, и в частност на $S(KG)$, като се има предвид, че p-компонентата на мултипликативната група на всяко поле е коциклична p-група за произволно просто число p, т.е. циклична p-група или квазициклична група $Z(p^\infty)$ (групата от p^n-тите корени на единицата за променливо $n \in \mathbb{N}$).

Стоеше открит въпросът, дали горният процес може да се моделира за описанието на групата $S(RG)$, когато G е крайна абелева p-група и R е неразложим комутативен пръстен с единица, в който p е обратим елемент.

В настоящия параграф установяваме структурата на $S(RG)$ в посочения случай и даже в по-общия случай, когато G е крайна абелева p-група и R е директно произведение на комутативни неразложими пръстени с единица, в който p е обратим елемент. Описанието на $S(RG)$ се получава благодарение на серия резултати от работи на Моллов, Моллов и Начев, и Начев, които ще посочим последователно. Когато G е крайна абелева група с експонента n и R е комутативен неразложим пръстен с единица, в който n е обратим елемент, то Моллов и Начев [MN] установяват следната формула за разлагане на RG в директна сума на разширения $R[\eta_d]$

$$RG \cong \dot{\sum_{d/n}} a(d) R[\eta_d], \tag{3}$$

където η_d е корен на нормиран неразложим делител на циклотомичния полином $\Phi_d(x)$, а $a(d)$ е броят на повторенията на пръстена $R[\varepsilon_d]$, който брой зависи от G и R. От директното разлагане (3) получаваме

$$U(RG) \cong \coprod_{d/n} \coprod_{a(d)} R[\eta_d]^*,$$

където $R[\eta_d]^*$ е мултипликативната група на разширението $R[\eta_d]$. От това разлагане на $U(RG)$ може директно да се получи теорема 3.4 на [MN3], в случая когато G е абелева p-група. Както споменахме, горната структура на $U(RG)$, т.е. теорема 3.4 на [MN3], а също и структурата на $U(RG)$, дадена от Моллов и Начев в [MN], са сложни и не е окончателни. Те са предмет на допълнително изследване, тъй като структурата на мултипликативната група $R[\eta_d]^*$ е комплицирана и не е изследвана.

Целта на настоящия параграф е да се установи прозрачна структура на $S(RG)$, когато G е крайна абелева p-група и R е посоченият пръстен.

В статията за изоморфизъм на групови алгебри на крайни абелеви p-групи Моллов и Начев [MN2] въвеждат понятието спектър $s_p(R)$ на R спрямо p по същия начин, както във формула (1). Това дава възможност (3) да стане от вида (2). Предварително Начев [N6] установява, че ако R е неразложим пръстен, то $R[\varepsilon_i]$ е също неразложим пръстен. По-нататък Начев [N7] доказва, че въведеният спектър $s_p(R)$ притежава същите свойства, както спектърът $s_p(K)$ на полето K, и че p-компонентата на мултиликативната група $R[\varepsilon_i]$ е също коциклична p-група. По този начин може да се получи аналогично моделиране на процеса на описанието на $S(RG)$, което ще реализираме последователно в доказателството на резултатите ни.

Преди да формулираме и докажем основните ни твърдения, ще въведем някои дефиниции и ще посочим някои предварителни резултати. Нека R^* е мултипликативната група на пръстена R и p е просто число. Означаваме p-компонентата $(R^*)_p$ на R^* с R_p, т.е. $(R^*)_p = R_p$. Нека $\alpha \in L$ е алгебричен елемент над пръстена R и α е корен на полином $f(x) \in R[x]$ от степен n. Както в [MN], ще казваме, че $f(x)$ е минимален полином на α, ако α не е корен на полином над R , чийто степен е по-ниска от n. Означаваме с $R[\alpha]$ сечението от всички подпръстени на L съдържащи R и α.

Ще казваме, че абелевата група G има *крайна експонента* n и записваме $exp(G) = n$, ако $G^n = 1$ и n е най-малкото естествено число с това свойство. В противен случай казваме, че експонентата на G е безкрайност и записваме $exp(G) = \infty$.

Тъй като разглеждаме мултипликативни групи, то вместо понятието директна сума на групи ще употребяваме понятието копроизведение или ограничено директно произведение на групи.

Нека p е просто число, което е обратимо в комутативния неразложим пръстен R с единица. Да означим с $Z(n)$ цикличната група от ред n. Нека $\varepsilon_n (n \in \mathbb{N})$ е фиксиран корен на нормиран неразложим делител на циклотомичния полином

$$\Phi_{p^n}(x) = x^{p^{n-1}(p-1)} + x^{p^{n-1}(p-2)} + ... + x^{p^{n-1}} + 1$$

над R.

Нека $[R[\varepsilon_d] : R]$ е размерността на свободния R-модул $R[\varepsilon_d]$ над пръстена R.

Ако G е абелева p-група и $k \in \mathbb{N}$, то означаваме

$$G[p^k] = \left\{ g \in G |\ g^{p^k} = 1 \right\}.$$

Формулираме следната дефиниция.

Дефиниция. Пръстенът R с характеристика, различна от простото число p, се нарича *пръстен от първи род спрямо* p, ако съществува естествено число $j \quad (j \geq 2)$, така че $R[\varepsilon_j] \neq R[\varepsilon_{j+1}]$. В противен случай R се нарича *пръстен от втори род спрямо* p.

От тази дефиниция следва веднага, че ако R е пръстен от втори род спрямо 2, то $R[\varepsilon_2] = R[\varepsilon_j]$ за всяко естествено число $j \geq 2$.

Начев [N7, Следствие 5.2] доказва следния резултат (леко модифициран).

Теорема 1.6. *Нека R е комутативен неразложим пръстен с единица и простото число p е обратимо в R. Ако R е пръстен от първи род спрямо p, то съществува $i \in \mathbb{N}$, така че ако $p \neq 2$, то*

$$R[\varepsilon_1] = R[\varepsilon_2] = ... = R[\varepsilon_i] \neq R[\varepsilon_{i+1}] \neq ...,$$

а ако $p = 2$, то

$$R[\varepsilon_2] = R[\varepsilon_3] = ... = R[\varepsilon_i] \neq R[\varepsilon_{i+1}] \neq ... \quad .$$

Ако R е пръстен от втори род спрямо p и $p \neq 2$, то $R[\varepsilon_1] = R[\varepsilon_j]$ за всяко $j \in \mathbb{N}$.

Тази теорема и свойството на пръстена R от втори род, формулирано непосредствено след горната дефиниция, показват, че свойствата на пръстените от първи и втори род спрямо p са абсолютно същите, както свойствата на полетата от първи и втори род (вж [B2] и [K1, Лема 12.34].

Когато R е пръстен от първи род спрямо простото число p, то естественото число i, дефинирано в последната теорема, се нарича *константа на пръстена R спрямо p.*

Нека $\coprod\limits_n G$ и $\sum_n^{\cdot} R$, където $n \in \mathbb{N}$, означават съответно копроизведението на n копия на G и директната сума на n копия на R.

Доказваме следните твърдения.

Теорема 1.7. *Нека G е крайна абелева p-група, R е комутативен неразложим пръстен с единица, $p \in R^*$ и R е пръстен от втори род спрямо p.*

1) Ако или $p \neq 2$, или $p = 2$ и $R = R[\varepsilon_2]$, то

$$S(RG) \cong \coprod_{(|G|-1)/[R[\varepsilon_1]:R]} Z(p^\infty).$$

2) Ако $p = 2$ и $R \neq R[\varepsilon_2]$, то

$$S(RG) \cong \coprod_{|G[2]|-1} Z(2) \times \coprod_{|G \backslash G[2]|/2} Z(2^\infty).$$

В следващата теорема ще означаваме $\coprod_{k=i+1}^{n} Z(p^k) = 1$, ако $i+1>n$.

Теорема 1.8. *Нека G е крайна абелева p-група с експонента p^n ($n \in \mathbb{N}$), R е комутативен неразложим пръстен с единица, $p \in R^*$ и R е пръстен от първи род с константа i спрямо p.*

1) Ако или $p \neq 2$, или $p=2$ и $R = R[\varepsilon_2]$, то

$$S(RG) \cong \coprod_{\delta_i} Z(p^i) \times \coprod_{k=i+1}^{n} \coprod_{\delta_k} Z(p^k),$$

$\delta_i = (|G[p^i]|-1)/[R[\varepsilon_i]:R]$, $\delta_k = |G[p^k] \setminus G[p^{k-1}]|/[R[\varepsilon_k]:R]$, $k=i+1,...,n$.

2) Ако $p=2$ и $R \neq R[\varepsilon_2]$, то

$$S(RG) \cong \coprod_{\delta_1} Z(2) \times \coprod_{\delta_i} Z(2^i) \times \coprod_{k=i+1}^{n} \coprod_{\delta_k} Z(2^k),$$

$\delta_1 = |G[2]|-1$, $\delta_i = |G[2^i] \setminus G[2]|/[R[\varepsilon_i]:R]$, $\delta_k = |G[2^k] \setminus G[2^{k-1}]|/[R[\varepsilon_k]:R]$, $k=i+1,...,n$.

Теорема 1.9. *Нека G е крайна абелева p-група и $R = \prod_{i \in \mathbb{I}} R_i$, където R_i са комутативни неразложими пръстени с единици и p е обратим елемент в R. Тогава*

$$S(RG) \cong (\prod_{i \in \mathbb{I}} S(R_iG))_p.$$

По-специално, ако $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ ($n \in \mathbb{N}$), то

$$S(RG) \cong \prod_{i=1}^{n} S(R_iG)$$

Описанието на всяка група $S(R_iG)$ ($i=1,...,n$) е дадено чрез теореми 1.7. и 1.8..

В доказателствата на тези теореми се използват следните резултати, в които R е комутативен неразложим пръстен с единица:

1) ако G е крайна абелева група с експонента n и n е обратим елемент в R, то

$$RG \cong \dot{\sum_{d/n}} a(d) R[\eta_d]$$

[MN, Забележка 4.5];

2) ако α е алгебричен елемент над R, така че минималният полином над R е нормиран и неразложим, то $R[\alpha]$ е неразложим пръстен [N6];

3) ако простото число p е обратимо в R, то p-компонентата R_p на мултипликативната група R^* е коциклична група [N7];

4) ако G е крайна абелева група и $R_i \quad (i \in \mathbb{I})$, са комутативни пръстени с единици, то

$$(\prod_{i\in\mathbb{I}} R_i)G \cong \prod_{i\in\mathbb{I}} R_iG$$

[MN6].

Основните резултати на този параграф са публикувани в работата [KMN2] и са докладвани на две международни конференции [Доклади 1 и 2].

§2. Мултипликативни групи на комутативни модулярни групови алгебри

В този параграф ще предполагаме, че G е абелева група и R е комутативен пръстен с единица и проста характеристика p. В този случай, груповата алгебра RG се нарича *модулярна.* Строежът на мултипликативната група $U(RG)$ на груповата алгебра RG на абелева група G над комутативен пръстен R има не само самостоятелно значение, но и тясно свързан с проблема за изоморфизма. Да означим с $V(RG)$ подгрупата на $U(RG)$ със свойството

$$V(RG) = \left\{ x = \sum_{g\in G} \alpha_g g | \quad x \in U(RG), \sum_{\alpha_g \in R} \alpha_g = 1 \right\}.$$

Елементът x се нарича *нормирана единица на RG*. Групата $V(RG)$ се нарича *нормирана мултипликативна група на RG или група от нормираните единици на RG*. Добре известно е, че $U(RG) = R^* \times V(RG)$, където R^* е мултипликативната група на пръстена R. По този начин изследването на $U(RG)$ се свежда до изследване на групата $V(RG)$. *Да означим с $S(RG)$ силовската p-подгрупа на групата $V(RG)$, т.е. p-компонентата на $V(RG)$.*

Изучаването на групата $S(RG)$ започва с фундаменталната работа на Берман [B1], в която се дава пълно описание, с точност до изоморфизъм, на $S(RG)$, когато G е изброима безкрайна абелева p-група и R е изброимо поле с характеристика p, така че ако G не е ограничено директно произведение на циклични групи, то полето R е *съвършено*, т.е. $R^p = R$. По-късно Моллов в [M1, M2] изчислява инвариантите на Улм-Каплански $f_\alpha(S)$ на групата $S(RG)$, когато G е произволна абелева група и R е поле с положителна характеристика p. Нека R е комутативен пръстен с единица и проста характеристика p. Начев и Моллов в [NM] изчисляват инвариантите $f_\alpha(S)$ с единствено ограничение G да е абелева p-група. Начев в [N4] пресмята инвариантите $f_\alpha(S)$ без ограничение за G. Нещо повече, във всичките посочени случаи авторите дават пълно описание, с точност до изоморфизъм, на максималната делима подгрупа $dS(RG)$ на $S(RG)$.

Нека G е абелева p-група и K е съвършенно поле с характеристика p. Мей в [May1] доказва, че $S(KG)$ е просто представена група тогава и само тогава, когато G е просто представена абелева p-група. Следователно, ако G е просто представена абелева p-група, то инвариантите на Улм-Каплански $f_\alpha(S)$ на групата $S(KG)$, заедно с описанието за максимална делима подгрупа на $S(KG)$, дават пълно описание, с точност, до изоморфизъм, на групата $S(KG)$.

Като използват резултата на Мей, Моллов и Начев [MMN], а също и на Мей [May], Моллов и Начев [MN3] дават пълно описание, с точност до изоморфизъм на групата $U(RG)$, когато или

(i) R е директно произведение на m съвършенни полета с характеристика p, $m \in \mathbb{N}$, G е p-смесена абелева група, p-компонентата G_p на G е просто представена и или G е разцепляема група, или G е от изброим ранг без торзия, или

(ii) R е безкрайно директно произведение на комутативни неразложими пръстени с единица, G е крайна абелева група и експонентата на G е обратим елемент в R (Теорема 3.4 на [MN3]).

В работата [Dg] Данчев дава описание на максималната делима подгрупа $dV(FG)$ на $V(FG)$, когато G е p-смесена абелева група и F е поле с положителна характеристика p.

Нека G е абелева група и R е комутативен пръстен с единица и проста характеристика p. Означаваме p-компонентата на G с G_p, когато p е просто число. Групата G наричаме *p-смесена*, ако максималната периодична подгрупа на G, т.е. (периодичната част на G), съвпада с G_p. Да означим с tG –периодичата част на G и с R_p - p-компопнентата на мултипликативната група R^* на пръстена R.

В настоящия параграф продължаваме спометатите изследвания на Моллов и Начев в [MN3] на $V(RG)$, а също и на Данчев [Dg], като даваме описание на $dV(RG)$, когато G е p-смесена абелева група и R е директно произведение на m неразложими пръстени с проста характеристика p ($m \in \mathbb{N}$) и с единица. Доказваме, че ако G е абелева група и R е комутативен съвършен пръстен с единица и проста характеристика p без нилпотентни елементи, то подгрупата G_p е балансирана в $S(RG)$. Този резултат е коректно доказателство на доказателството на Данчев [D3, лема 1] и [Dg, лема 11].

Освен това изчисляваме α-тия инвариант на Улм-Каплански на групата $S(RG)/G_p$ (α е ординално число), когато G^{p^α} и R са крайни групи, т.е. коригираме теорема 6 (i) на [D3], и показваме, че тази теорема с дадена непълно и нееднозначно.

В този параграф даваме четири необходими и достатъчни условия $V(RG)/G$ да е p-група, когато G е директен множител на $V(RG)$.

Ако R е директно произведение на m комутативни съвършенни пръстени R_i и G е директен множител на $V(R_iG)$ (i=1,2,...m), то даваме пълно описание, с точност до изоморфизъм,

(i) на максималната делима подгрупа на $V(RG)$, ако всяка двойка (R_i, G) (i=1,2,...m) удовлетворява едно от посочените от нас четири необходими и достатъчни условия $V(RG)/G$ да е p-група и

(ii) на $V(RG)$, ако $V(R_iG)/G$ (i=1,2,...,m) са просто представени p-групи и пръстенът R е без нилпотентни елементи.

Доказваме следните резултати:

Теорема 2.11. *Нека G е p-смесена абелева група и R е неразложим пръстен с единица и проста характеристика p. Тогава*

$$dV(RG) \cong dS(RG) \times dG/dG_p.$$

Теорама 2.12. *Нека G е p-смесена абелева група, $R = R_1 \times ... \times R_n$ и R_i са неразложими пръстени с единица и проста характеристика p. Тогава*

$$dV(RG) \cong \coprod_{i=1}^{n} dS(R_iG) \times \coprod_{n} (dG/dG_p).$$

В доказателството на теоремите предварително доказваме следните спомагателни резултати:

1) ако $H \leq G$ и $G_p \subseteq H$, то $G_p \subseteq H^{q^\alpha}$ за всяко просто число $q \neq p$ и за всяко ординално число α. В частност $G_p \subseteq G^{q^\alpha}$ и $G_p = G_p^{q^\alpha}$. Ако A е абелева p-група, то $A^{q^\alpha} = A$ (Лема 2.7.);

2) ако A е абелева p-група и α е произволно ординално число, то $A^{p^{\omega\alpha}} = A^{(\alpha)}$ (Лема 2.8).

Забележка. Максималните делими подгрупи $dS(RG)$ и $dS(R_iG)$ от (2.17) и (2.20), т.е. съответно от теореми 2.11 и 2.12, са описани, с точност до изоморфизъм, в работата на Начев [N4]. Следователно теореми 2.11 и 2.12 дават пълно описание, с точност до изоморфизъм, на максималната делима подгрупа $dV(RG)$ на групата $V(RG)$ и обобщават резултатите на Начев [N4] и Данчев [Dg].

Елементът $a \in G$ се нарича *p-собствен спрямо подгрупа H на G*, ако съществува елемент ax в съседния клас aH, т.е. $x \in H$, така че $h_G(ax) = h_{G/H}(aH)$.

Подгрупата H на G се нарича *p-хубава в G*, ако всеки съседен клас на G по H съдържа p-собствен елемент спрямо H. Подгрупата H се нарича *хубава подгрупа на G*, ако H е *p-хубава в G* за всяко просто число p.

Подгрупата H на G се нарича *p-изотипна в G*, ако $H \cap G^{p^\alpha} = H^{p^\alpha}$ за всяко ординално число α. H се нарича *изотипна в G*, ако е p-изотипна за всяко просто число p.

Подгрупата H на абелева група G се нарича *p-балансирана в G*, ако е p-хубава и p-изотипна в G. H се нарича *балансирана в G*, ако е p-балансирана за всяко просто число p.

Предложение 2.17. *Ако G е абелева група и R е комутативен съвършен пръстен с единица и проста характеристика p без нилпотентни елементи, то подгрупата G_p е балансирана в $S(RG)$.*

Забележка. Доказателството на предложение 2.17 е *коректно и кратко доказателство* на лема 1 от [D3], а също и на втората част на лема 11 от [Dg] (за некоректното доказателство на лема 1 от [D3] вж. ревюто на Моллов Zbl. 1067.16054).

Предложение 2.18. *Всеки краен комутативен пръстен с единица и проста характеристика p без нилпотентни елементи е p-съвършен, т.е. $R^p = R$.*

За произволно ординално число α въвеждаме *α-тия инвариант на Улм-Каплански на абелева p-група G* по следния начин:

$$f_\alpha(G) = rank(G^{p^\alpha}[p]/G^{p^{\alpha+1}}[p]).$$

В следващата теорема означаваме *групата $S(RG)$ с S.*

Теорема 2.19. *Нека G е абелева група и R е краен комутативен пръстен с единица и проста характеристика p без нилпотентни елементи. Ако α е произволно ординално число и G^{p^α} е крайна група, то*

$$f_\alpha(S/G_p) = f_\alpha(S) - f_\alpha(G_p),$$
$$f_\alpha(S) = (|G^{p^\alpha}| - 2|G^{p^{\alpha+1}}| + |G^{p^{\alpha+2}}|)log_p|R|.$$

Ще отбележим, че *теорема 2.19 дава пълен отговор за инвариантите на Улм-Каплански $f_\alpha(S/G_p)$ в случай (i) от теорема 6 на [D3].* Освен това *случай (i) на последната теорема е незавършен, нееднозначен и усложнен.* За да обосновем нашето твърдение, ще дадем оригиналната формулировка на случай (i) на теорема 6 на Данчев [D3] и ще направим допълнителен коментар върху теоремата.

"**Теорема 6.** *Нека $1 \neq G$ е абелева група и R е унитарен съвършен комутативен пръстен без нилпотентни елементи с проста характеристика p. Тогава* *(i) ако $|R| < \aleph_0$ и $|G^{p^\sigma}| < \aleph_0$, то за всяко ординално число σ,*

$$f_\sigma(S(RG)/G_p) = \begin{cases} (|G^{p^\sigma}| - 2|G^{p^{\sigma+1}}| + |G^{p^{\sigma+2}}|)log_p|R| - f_\sigma(G_p), \\ \quad \text{когато } G_p^{p^\sigma} \neq 1 \text{ и } |G^{p^\sigma}| \neq |G^{p^\sigma}[p]| \neq 2, \text{ или } |R| \neq 2; \\ 0, \text{ когато } G_p^{p^\sigma} = 1, \text{ или } |G^{p^\sigma}| = |G^{p^\sigma}[p]| = 2 \text{ и } |R| = 2." \end{cases}$$

Като коментар *ще направим три забележки 1), 2) и 3) на тази теорема, т.е. на [D3, Теорема 6, случай (i)].*

1) *Случаят* (i) *на теорема 6 [D3] има нееднозначно тълкуване. Именно, този случай се тълкува по четири различни начина.* Действително, нека положим $\sigma = 0$. Нека A да бъде твърдението "$G_p \neq 1$“, B– твърдението "$|G| \neq |G[p]| \neq 2$“, C – "$|R| \neq 2$“ и D – "$|G| = |G[p]| = 2$". Да означим с $\overline{A}$ отрицанието на твърдение A. Тогава случай (i) на Теорема 6 при $\sigma = 0$, може да бъде формулиран по следният начин, който е еквивалентен на оригинала.

(i) Ако $|R| < \aleph_0$ и $|G| < \aleph_0$, то случай (i) на теорема 6 е в сила, когато

(a) A и B или C е изпълнено, т.е. $A \wedge B \vee C$

и $f_i(S/G_p) = 0$, когато

(b) $\overline{A}$ или D и $\overline{C}$ е изпълнено, т.е. $\overline{A} \vee D \wedge \overline{C}$.

Очевидно е, че може да тълкуваме твърдението (a) на (i) по два начина: или като $(A \wedge B) \vee C$ или като $A \wedge (B \vee C)$. Отбелязваме, че авторът не посочва как трябва да се поставят скобите. Аналогично за твърдение (b), т.е. $\overline{A} \vee D \wedge \overline{C}$ може да бъде изтълкувано също по два начина. Следователно случай (i) на теорема 6 [D3] е двусмислен и по точно има четири интерпретации.

2) *Случаят (i) на теорема 6 на [D3] е незавършен.* Не е трудно да се види, че за да бъде случаят (i) завършен (при $\sigma = 0$) трябва да е изпълнено $\overline{D} = B$, което очевидно не е така във формулировката на теоремата.

3) *Случаят (i) на теорема 6 на [D3] е усложнен.* Именно, не е необходимо да се разглеждат два различни подслучая, както това е направено в работата на Данчев [D3] (вж, например, Теорема 2.19.).

Ако R е пръстен, то под тривиални решения на $R/N(R)$ ще разбираме $1 + N(R)$ и $N(R)$, т.е. единичният и нулевият елемент на $R/N(R)$. Доказваме следните резултати.

Теорема 2.25. *Нека G е абелева група и R е комутативен пръстен с единица и проста характеристика p. Нека, освен това, G е директен множител на $V(RG)$. Тогава $V(RG)/G$ е p-група тогава и само тогава, когато G удовлетворява точно едно от следните четири условия:*

1) $G = G_p$*;*

2) $G \neq G_p, tG = G_p$ *и пръстенът* R *е неразложим;*

3) $p = 3, R^* = \langle -1 \rangle \times R_3^*, G = A \times G_3, |A| = 2$ *и*

4) $p = 2, R^* = R_2^*, G = A \times G_2, |A| = 3$ *и уравнението* $X^2 + XY + Y^2 = 1 + N(R)$ *има само тривиални решения във фактор-пръстена* $R/N(R)$*.*

Следствие 2.26. *Нека* R *е комутативен пръстен с проста характеристика* p *и* G *е директен множител* $V(RG)$*. Тогава* $V(RG)/G$ *е* p*-група тогава и само тогава, когато* $V(RG) = GS(RG)$*.*

Предложение 2.27. *Нека* G *е абелева група и* R *е комутативен съвършен пръстен с единица и проста характеристика* p*. Тогава за максималната делима подгрупа* dT *на* $T = S(RG)/G_p$ *следното е в сила: ако* α *е първото ординално число, така че* $G^{p^\alpha} = G^{p^{\alpha+1}}$*, то* $dT = S(RG^{p^\alpha})G_p/G_p$*,* $dT \cong S(RG^{p^\alpha})/G_p^{p^\alpha}$ *и*

$$dT \cong \coprod_{\lambda} Z(p^\infty),$$

където

1) $\lambda = max(|R|, |G^{p^\alpha}|)$*, ако* $G_p^{p^\alpha} \neq 1$*;*

2)$\lambda = max(|R(p)|, |G^{p^\alpha}|)$*, ако* $G_p^{p^\alpha} = 1$*,* $G^{p^\alpha} \neq 1$ *и* $R(p) \neq 0$ *и*

3)$\lambda = 0$*, т.е.* $dT = 1$*, ако* $G_p^{p^\alpha} = 1$ *и или* $G^{p^\alpha} = 1$*, или* $R(p) = 0$*.*

Теорема 2.28. *Нека* R *е директно произведение на* m *комутативни съвършенни пръстени* R_i *с проста характеристика* p*,* $m \in \mathbb{N}$ *и* G *е абелева* p*-група. Нека, освен това, за всяко* $i = 1, 2, ..., m$*,* G *е директен множител на* $V(R_iG)$ *и наредената двойка* (R_i, G) *удовлетворява точно едно от условията 1)–4) на теорема 2.25. Тогава съществуват* p*-подгрупи* T_i *на* $V(R_iG)$ $\quad (i = 1, 2, ..., m)$*, така че*

$$V(RG) \cong \coprod_{m} G \times \coprod_{i=1}^{m} T_i, \quad T_i \cong S(R_iG)/G_p.$$

и

$$dV(RG) \cong \coprod_{m} dG \times \coprod_{i=1}^{m} dT_i.$$

Нека α *е първото ординално число със свойството* $G^{p^\alpha} = G^{p^{\alpha+1}}$*. Тогава* $dT_i = S(R_iG^{p^\alpha})G_p/G_p$ *и* $dT_i \cong S(R_iG^{p^\alpha})/G_p^{p^\alpha}$*. Освен това*

$$dT_i \cong \coprod_{\lambda} Z(p^\infty),$$

където

1)$\lambda = max(|R_i|, |G^{p^\alpha}|)$, *ако* $G_p^{p^\alpha} \neq 1$,

2)$\lambda = max(|R_i(p)|, |G^{p^\alpha}|)$, *ако* $G_p^{p^\alpha} = 1$, $G^{p^\alpha} \neq 1$ *и* $R_i(p) \neq 0$ *и*

3)$\lambda = 0$, *т.е.* $dT_i = 1$, *ако* $G_p^{p^\alpha} = 1$ *и или* $G^{p^\alpha} = 1$ *или* $R_i(p) = 0$.

Теорема 2.29. *Нека* R *е директно произведение от* m *комутативни съвършенни пръстени* R_i *с единица и проста характеристика* p *без нилпотентни елементи,* $m \in \mathbb{N}$ *и* G *е абелева* p*-група. Нека, освен това, за всяко* $i = 1, 2, ..., m$, G *е директен множител на* $V(R_iG)$ *и* $V(R_iG)/G$ *е просто представена* p*-група. Тогава съществуват просто представени* p*-подгрупи* T_i *на* $V(R_iG) \quad (i = 1, 2, ..., m)$, *така че*

$$V(RG) = \coprod_m G \times \coprod_{i=1}^{m} T_i, \quad T_i \cong S(R_iG)/G_p$$

е изпълнено. Всяка група T_i *се описва, с точност до изоморфизъм, от инвариантите на Улм-Каплански* $f_\alpha(T_i)$ *и от максималната си делима подгрупа* dT_i. *Инвариантите* $f_\alpha(T_i)$ *са следните:*

(a) ако R_i *и* G^{p^α} *са крайни, то*

$$f_\alpha(T_i) = (|G^{p^\alpha}| - 2|G^{p^{\alpha+1}}| + |G^{p^{\alpha+2}}|) log_p |R_i| - f_\alpha(G_p).$$

(b) Ако или $|R_i| \geq \aleph_0$ *или* $|G^{p^\alpha}| \geq \aleph_0$, *то*

$$f_\alpha(T_i) = \begin{cases} max(|R_i|, |G^{p^\alpha}|), & \text{ако } |G_p^{p^\alpha}| \neq 1 \\ & \text{и } G^{p^\alpha} \neq G^{p^{\alpha+1}}; \\ 0, & \text{ако или } G_p^{p^\alpha} = 1, \\ & \text{или } G^{p^\alpha} = G^{p^{\alpha+1}}. \end{cases}$$

За максималната делима подгрупа dT_i *на* T_i *следните твърдения са в сила: ако* α *е първото ординално число, така че* $G^{p^\alpha} = G^{p^{\alpha+1}}$, *то* $dT_i \cong S(R_iG^{p^\alpha})/G_p^{p^\alpha}$. *Освен това за* dT_i *важи формула*

$$dT_i \cong \coprod_\lambda Z(p^\infty),$$

където

1)$\lambda = max(|R_i|, |G^{p^\alpha}|)$, *ако* $G_p^{p^\alpha} \neq 1$.

2)$\lambda = max(|R_i(p)|, |G^{p^\alpha}|)$, *ако* $G_p^{p^\alpha} = 1$, $G^{p^\alpha} \neq 1$ *и* $R_i(p) \neq 0$ *и*

3)$\lambda = 0$, *т.е.* $dT_i = 1$, *ако* $G_p^{p^\alpha} = 1$ *и или* $G^{p^\alpha} = 1$, *или* $R_i(p) = 0$.

За доказателствата на твърдения 2.25, 2.26, 2.27, 2.28 и 2.29 използваме следните резултати:

1) Ако R е комутативен пръстен с единица и проста характеристика p, G е абелева група и α е първото ординално число със свойството $R^{p^\alpha} = R^{p^{\alpha+1}}$ и $G^{p^\alpha} = G^{p^{\alpha+1}}$, то

$$dS(RG) \cong \coprod_{\lambda} \mathbb{Z}(p^\infty),$$

където

1.1)$\lambda = max(|R^{p^\alpha}|, |G^{p^\alpha}|)$, ако $G_p^{p^\alpha} \neq 1$;

1.2)$\lambda = max(|R^{p^\alpha}(p)|, |G^{p^\alpha}|)$, ако $G_p^{p^\alpha} = 1, G^{p^\alpha} \neq 1$ и $R^{p^\alpha}(p) \neq 0$ и

1.3)$\lambda = 0$, т.е. $dS(RG) = 1$, ако $G_p^{p^\alpha} = 1$ и или $G^{p^\alpha} = 1$, или $R^{p^\alpha}(p) = 0$. (Теорема 2.20.) [N4];

2) хомоморфизмът $\varphi : (\Pi_{i\in I} R_i)G \rightarrow \Pi_{i\in I}(R_iG)$ на R-алгебри, дефиниран чрез $\varphi(a) = (..., \sum_{g\in G_a} a_{gi}g, ...)$ е изоморфизъм на R-алгебри тогава и само тогава, когато или I е крайно множество или G е крайна група. (Предложение 2.21.) [MN3];

3) ако R е комутативен пръстен с единица и проста характеристика p и G е абелева група . Равенството $V(RG) = GS(RG)$ е в сила тогава и само тогава, когато е изпълнено поне едно от следните условия:

3.1) $G = G_p$;

3.2) $G \neq G_p, tG = G_p$ и пръстенът R е неразложим;

3.3) $p = 3, R^* = \langle -1\rangle \times R_3^*, G = A \times G_3, |A| = 2$ и пръстенът R е неразложим и

3.4) $p = 2, R^* = R_2^*, G = A \times G_2, |A| = 3$ и уравнението $X^2 + XY + Y^2 = 1 + N(R)$ има само тривиални решения в $R/N(R)$. (Теорема 2.23.) [MN4];

4)ако G е p-смесена абелева група и пръстена R е директно произведение на m съвършенни полета F_i с характеристика p, $m \in \mathbb{N}$ допускаме, че G_p е просто представена и или (i) G е разцепляема група или (ii) G е от изброим ранг без торзия. Тогава съществуват p-подгрупи T_i на $V(F_iG) \quad (i = 1, 2, ..., m)$, така че

$$V(RG) \cong \coprod_m G \times \coprod_{i=1}^m T_i, \quad T_i \cong S(F_iG)/G_p.$$

Всяка група T_i е просто представена и се описва, с точност до изоморфизъм, от инвариантите на Улм-Каплански $f_\alpha(T_i)$ и от максималната делима подгрупа dT_i. Инвариантите $f_\alpha(T_i)$ са следните:

(a) ако F_i и G^{p^α} са крайни, то

$$f_\alpha(T_i) = (|G^{p^\alpha}| - 2|G^{p^{\alpha+1}}| + |G^{p^{\alpha+2}}|)log_p|F_i| - f_\alpha(G_p).$$

(b) Ако или $|F_i| \geq \aleph_0$ или $|G^{p^\alpha}| \geq \aleph_0$, то

$$f_\alpha(T_i) = \begin{cases} max(|F_i|, |G^{p^\alpha}|), & \text{ако } |G_p^{p^\alpha}| \neq 1 \\ & \text{и } G^{p^\alpha} \neq G^{p^{\alpha+1}}; \\ 0, & \text{ако или } G_p^{p^\alpha} = 1, \\ & \text{или } G^{p^\alpha} = G^{p^{\alpha+1}}. \end{cases}$$

(Теорема 2.24.) [MN3];

Забележка 1. Инвариантите на Улм-Каплански на групата $S(FG)/G_p$ в крайния случай, т. е. в случай (a) на теорема 2.29 са изчислени неточно от Данчев в [D3, теорема 6, случай *(i)*].

Забележка 2. Нека G и R са както в теорема 2.29. В работата на Моллов и Начев [MN3] е отбелязано следното:

a) описанието на $d(S(RG)/G_p)$ в работата на Данчев [Dg] не е дадено, с точност до изоморфизъм въпреки, че автора твърди обратното и

b) структурите на $S(RG)$ и $V(RG)$ в статиите на Данчев [D3, Dg] не са напълно определени.

Следователно от случаите *a) и b)* на Забележка 2 следва, че нашето предложение 2.27 и теорема 2.29 не са следствия от резултатите на Данчев [D3, Dg].

Забележка 3. Теорема 2.12, Теореми 2.28 и 2.29 са публикувани в работите [KV] и [KM]. По-късно Данчев в своята работа [D8] дава описание на $dV(RG)$ без ограничение за пръстена R. Това е обобщение на теорема 2.12, а също и на теореми 2.28 и 2.29 в частта, отнасяща се за делимата подгрупа $dV(RG)$.

Основните резултати на този параграф са публикувани в работите [KV], [KM] и [KMN].

§3. Някои свойства на мултипликативните групи на груповите алгебри

Отначало в този параграф ще дадем дефиниция на експонента на абелева p-група, различна от тази в § 1. Казваме, че абелевата p-група G има *крайна експонента* $\exp(G)$, ако съществува $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, така че $G^{p^n} = 1$. Ако G има крайна експонента, $G^{p^n} = 1$ и n е минималното число от $\mathbb{N}_0$ с това свойство, то казваме, че G има *експонента* n *и записваме* $exp(G) = n$. В противен случай казваме, че *експонентата на* G *е безкрайност* и записваме $\exp(G) = \infty$.

За представянето на основните резултати използваме следните означения. Ако A е подгрупа на групата G, то записваме $A \leq G$. Означаваме реда на $a \in G$ с $O(a)$ и с b/c числото bc^{-1}, когато b и c са реални числа, $c \neq 0$. Навсякъде в този параграф G означава абелева p-група и K е поле с характеристика, различна от p.

Нека $\varepsilon_n \quad (n \in \mathbb{N})$ е фиксиран корен на нормиран неразложим делител на циклотомичния полином $\Phi_{p^n}(x)$ над K. Нека μ_p е групата на p^n-тите корени на единицата, когато n се изменя в $\mathbb{N}$. Полето K с характеристика, различна от p, *наричаме поле от първи род спрямо* p ако степента $(K(\mu_p) : K)$ е безкрайна. В противен случай K се нарича *поле от втори род спрямо* p.

В настоящия параграф, ако G е абелева p-група, а K е поле от първи род спрямо p, така че $\mathbb{N} \subseteq s_p(K)$, то

1) изчисляваме $exp(S(KG)/G)$ и

2) доказваме, че ако групата G е сепарабелна абелева p-група, то G е хубава подгрупа на $S(KG)$.

Ще отбележим, че случая 1) коригира *грешна* формулировка и доказателство на резултата (i) [Предложение 2, D4], а случаят 2) дава коректно доказателство на (ii), т.е. на [D1, Предложение 16 (a)] или [D4, Лема 3]. Освен това показваме, че много резултати на Данчев от [D1], [D2] и [D4]–[D6] остават недоказани.

Берман [B1] и Карпиловски [K1, Лема 12.34, стр. 247] отбелязват свойствата на полетата от първи и втори род спрямо p (тези свойства са същите, както свойствата на пръстените от първи и втори род спрямо p (вж. теорема 1.5 от §1 и свойството отбелязано преди нея за пръстен от втори род спрямо p)).

Доказваме следния резултат.

Теорема 3.9. *Нека* G *е абелева* p*-група,* K *е поле от първи род спрямо* p *и* $\mathbb{N} \subseteq s_p(K)$*. Тогава*

(i) $exp(S(KG)/G) = exp(G) - 1$, *ако* $(K(\varepsilon_1) : K)$=$p - 1$ *и групата* G *е циклична и*

(ii) $exp(S(KG)/G) = exp(G)$ *в противния случай.*

За доказателството на тази теорема използваме, че K е поле с характеристика, различна от p:

1) ако K е поле от първи род спрямо p, то съществува $i \in \mathbb{N}$, така че ако $p \neq 2$, то

$$K[\varepsilon_1] = K[\varepsilon_2] = ... = K[\varepsilon_i] \neq K[\varepsilon_{i+1}] \neq ...,$$

а ако $p = 2$, то

$$K[\varepsilon_2] = K[\varepsilon_3] = ... = K[\varepsilon_i] \neq K[\varepsilon_{i+1}] \neq ....$$

Ако K е поле от втори род спрямо p, то $K[\varepsilon_q] = K[\varepsilon_j]$ за всяко $j \in \mathbb{N}$, където $q = 1$, ако $p \neq 2$ и $q = 2$, ако $p = 2$.

2)Ако K е поле от първи род спрямо p, то $(K(\varepsilon_j) : K(\varepsilon_i)) = p^{j-i}$ за всяко $j \geq i$, където i е константата на K спрямо p.

3) Нека G е крайна абелева p-група, K е поле от първи род спрямо p и $s_p(K) \supseteq \mathbb{N}$. Нека, освен това, e е минимален идемпотент на KG различен от e_0. Тогава p-компонентата $(KGe)_p$ на идеала KGe, който се разглежда като поле с единица e, се състои от елеметите ge, където g се изменя в G.

4) Ако G е крайна абелева p-група, $\mathbb{N} \subseteq s_p(K)$ и $x \in KG$, то $x \in S(KG)$ тогава и само тогава, когато

$$x = e_0 + g_1e_1 + ... + g_ne_n, g_i \in G,$$

където $e_0, e_1, ..., e_n$ образува пълна система от минимални ортогонални идемпотенти на KG. Следователно exp$(S(KG)) \leq$exp(G).

5) Нека G е крайна абелева p-група и $\mathbb{N} \subseteq s_p(K)$. Ако $x = 1 - e + ge$, където $g \in G$ и e е минимален идемпотент на KG, то $x \in G$ тогава и само тогава, когато $gKere \cap Ker(1 - e) \neq \emptyset$.

6) Ако G е циклична група от ред p, K е поле от първи род спрямо p, $(K(\varepsilon_1) : K) = p - 1$ и $s_p(K) \supseteq \mathbb{N}$, то $S(KG) = G$.

Забележка. *Теорема 3.9 е корекция на резултата на [D4, Предложение 2]*, т.е. тази теорема коригира формулировката и доказателството на предложение 2 на [D4], а случаят (i) на тази теорема дава редица контрапримери върху това предложение.

Предложение 2 от работата [D4] на Данчев има следната формулировка:

"**Предложение 2.** *За абелевата p-група G и* $s_p(K) \supseteq \mathbb{N}$, *имаме*

$$exp(S(KG)/G) = i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow exp(G) = i \in \mathbb{N}." \quad [D4]$$

Контрапримерът, посочен от нас след формулировката на предложение 2 на [D4] удовлетворява условието (i) на доказаната теорема 3.9. При доказателството на теорема 3.9 използваме подход, различен от този на предложение 2 на [D4].

Теорема 3.11. *Ако A е сепарабелна абелева p-група и K е поле от първи род спрямо p, така че $s_p(K) \supseteq \mathbb{N}$, то A е хубава подгрупа в $S(KA)$.*

Забележка. Теорема 3.11 е коректно доказателство на Предложение 16 (a) от Данчев [D1].

Показваме, че е централният резултат в [D2], остава недоказан. Предварително ще отбележим следните резултати в [D2].

"**Лема (Сервантност).** *Нека G е p-група. (*) Ако K е поле от първи род спрямо p, то G е сервантна в $S(KG)$.*" [D2]

"**Предложение (Структура).** ... *(оо) Ако G е директна сума на циклични p-групи, то същото важи за $S(KG)/G$ при условие, че K е поле от първи род спрямо p.*" [D2]

В доказателствата на предварителните резултати на [D2], а именно на Лемата (Сервантност) [D2, стр. 894], която съвпада с Лема 2 от [D4] и на Предложение (Структура) [D2, стр. 895] Данчев използва следната лема на Мей [May0].

"**Лема 2.** *Нека R е комутативен пръстен с единица и G е абелева група. Нека, освен това, съществува група B, така че G е изоморфна на директен множител на $U(RB)$. Тогава G е директен множител на $U(RG)$.*" [May0, Лема 2]

Тази лема е в сила за $U(RG)$, но Данчев я използва за $S(KG)$, което е некоректно. Ако трябва да приложим тази лема за $S(KG)$, то трябва отделно да докажем спомагателен резултат за $S(KG)$, аналогичен на лема 2 на Мей. Не можем да приемем този факт без доказателство.

Горепосочените Лема (Сервантност) и Предложение (Структура) на Данчев са използвани в доказателството на (iii), т.е. в доказателството на централния резултат на *теорема 1 от [D2].*

"**Теорема 1.** *Да допуснем, че K е поле от първи род спрямо p, $charK \neq p$ и G е абелева p-група. Тогава $S(KG)$ е периодически пълна тогава и само тогава, когато G е ограничена.*" [D2].

По този начин *Теорема 1, а следователно следствия 1–3 и глобалната теорема от [D2] остават недоказани.*

Ще покажем, че резултатът (iv) от [D1, Теорема 7], т.е. [D2, Предложение (Структура) $(\circ\circ)$*], остават недоказани.*

"**Теорема 7 (Директен множител).** *До допуснем, че A е директна сума на p-примарни циклични групи. Тогава $S(KA)/A$ е директна сума на циклични групи и по този начин A е директен множител на $S(KA)$, чийто допълнение е директна сума на циклични групи. Почобщо, A е директен множител на $V(KA)$*" [D1]

"Теорема 7 (Директен множител)" от [D1], който е идентичен с "Предложение (Структура) ($\circ\circ$)" от [D2], *остава недоказан*, поради следните причини. В края на доказателството на теорема 7 е използвана споменатата лема (Сервантност) [D2]. Тези твърдения остават недоказани, поради неправилно използване на споменатата лема 2 на Мей [May0].

Следната лема, която доказваме, се твърди без обосновка в доказателството на теорема 1 от [D4, стр. 153, редове 11-13 отгоре].

Лема 3.13. *Ако B е безкрайно копроизведение на циклични p-групи, K е поле от първи род спрямо p, и $\mathbb{N} \subseteq s_p(K)$, то $|S(KB)/B| = |B|$.*

Централният резултат на [D4], а именно теорема 1, в която се изчисляват инвариантите $f_i(S(KG)/G))$ на Улм-Каплански, остава недоказан поради следните причини.

(a) В доказателството на горната теорема 1 от [D4, стр.153, редове 11-13 отгоре] авторът пише абсолютно неоснователно

"Следователно $f_i(S(KB)/B) = |B|$, което се получава чрез използване на фактите, че $|S(KB)/B| = |B|$ и, че цикличните множители на $S(KB)/B$ от ред p са точно $|B|$, които следват аналогично [M1, Теорема 12], т.е. аналогично на [M5, Теорема 12]".

В лема 3.13 доказахме, че $|S(KB)/B| = |B|$. Обаче вторият факт, че "цикличните множители на $S(KB)/B$ от ред p са точно $|B|$, което следва аналогично на [M1, Теорема 12]" е недоказан. По-точно, доказателството на този факт не е аналогично на "[M1, Теорема 12]". Това трябва допълнително да се докаже, но това не е направено в статията на Данчев [D4].

(b) За доказателството на горната теорема 1 от [D4], Данчев използва леми 2 и 3 от същата работа и както отбелязахме по-горе, тези резултати остават недоказани (Лема 3 съвпада с Предложение 16 от [D1]). Лема 2 от [D4] е следната:

"**Лема 2.** *Абелевата p-група G е сервантна в $S(KG)$ при условие, че $s_p(K)$ съдържа всички естествени числа.*" [D4]

Лема 2 е недоказана (вж. Zbl. 1107.16030), а лема 3, т.е. [Предложение 16 (a) от D1], както споменахме, остава недоказано от автора.

Централните резултати на [D5] и [D6], които се отнасят за тривиалните единици на груповите алгебри, т.е. за тривиалните обратими елементи, остават въобще недоказани поради следните причини. За доказателството на резултата на [D6] авторът използва резултата на [D5], обаче последният резултат остава недоказан в [D5], тъй като в неговото доказателство случаят $(F(\eta_q):F) \neq q-1$ не е разглеждан (η_q е примитивен q-ти корен на единицата) (само случаят "$q-1=(F(\eta_q):F)$" е разгледан на стр. 142, ред 7 отдолу). Например случаят $(F(\eta_q):F) \neq q-1$ възниква, когато $F=\mathbb{Z}_{19}$ и $q=5$. А именно не е трудно да се види, че $(\mathbb{Z}_{19}(\eta_5):\mathbb{Z}_{19}) = 2 \neq 4 = q-1$.

Основните резултати на този параграф са публикувани в работата [KMN].

§4. Върху инвариантите на мултипликативните групи на груповите алгебри

Нека p е просто число, α е произволно ординално число, ζ_n е примитивен n-ти корен на единицата и $R[\zeta_n]$ е свободният R-модул, породен от ζ_n. Ако M е модул над пръстен, то с T_α означаваме периодичния подмодул на $p^\alpha M$. Уорфилд [W] въвежда инвариантите $h(\alpha, M)$ на KT-модула M над директно нормиран пръстен с

$$(4.1) \qquad h(\alpha, M) = dim(V_\alpha(M)), \quad V_\alpha(M) = p^\alpha M/(p^{\alpha+1}M + T_\alpha),$$

където $dimV_\alpha(M)$ е размерността на $V_\alpha(M)$.

Понятието KT-група е производно понятие на понятието KT-модул. Ако A е мултипликативна KT-група, то въведените инварианти (4.1) на A са

$$h(\alpha, A) = r(A^{p^\alpha}/A^{p^{\alpha+1}}A_p^{p^\alpha})$$

където $r(A)$ е рангът на групата A и α е гранично ординално число.

Да отбележим, че класът на Уорфилдови модулите е по-широк и съдържа класа на KT-модулите. Поради тази причина $h(\alpha, M)$ не се наричат "Уорфилдови инварианти" въпреки, че те са въведени от Уорфилд, тъй като $h(\alpha, M)$ са инвариантите на подкласа на класа от Уорфилдови модули. Ще отбележим, че Фукс [F] не ги нарича "Уорфилдови инварианти" а само счита, че тези инварианти са дадени от Уорфилд. Освен в [W], разискване за Уорфилдовите модули може да се намерят например в [H].

Ще отбележим, че в [D7] Данчев разглежда инвариантите $h(\alpha, U(RG))$ означени с $W_{\alpha,p}(U(RG))$. Следователно, $W_{\alpha,p}(U(RG))$ не трябва да бъдат наричани Уорфилдови инварианти. По такъв начин в заглавията на работата [D7] и на някои други работи, Данчев използва некоректно понятието "Уорфилдови инварианти". Тези заглавия и получените резултати създават погрешно впечатление в читателите, тъй като те не се отнасят за Уорфилдовите инварианти $g(e, U(RG))$, въведени в края на работата [W] на Уорфилд, а за инвариантите $h(\alpha, U(RG))$ на KT-групите.

Сега ще видим, че предложение 10 на [D7] няма смисъл. Предложение 10 е следното:

"**Предложение 10.** *Нека R е неразложим пръстен с проста характеристика p и G е абелева група, така че G_t/G_p е крайна. Тогава, за всяко ординално число α и просто число q, важи*

$$W_{\alpha,q}(U(RG)) = \sum_{d/|G_t/G_p|} \sum_{a(d)} W_{\alpha,q}(R[\zeta_d]^*) + \sum_{d/|G_t/G_p|} a(d) \cdot W_{\alpha,q}(G/\coprod_{l\neq p} G_l),$$

където $a(d) = |\,\{g \in G_t/G_p : order(g) = d\}\,|/[R[\zeta_d] : R]$.

В частност, ако R е съвършен, то

$$W_{\alpha,p}(U(RG)) = \sum_{d/|G_t/G_p|} a(d) \cdot W_{\alpha,p}(G/\coprod_{l\neq p} G_l)." \quad [D7]$$

В предложение 10 p и q са фиксирани прости числа. Нека r е просто число, различно от p и G е абелева група, така че $G = A \times B$, където A е произволна абелева p-група и $B =< h >$ е циклична група от ред r^n, $n \in N$. Нека, освен това, ζ_{r^n} е примитивен r^n-ти корен на единицата над R, така че ζ_{r^n} не е корен на единица над R от степен, по-ниска от r^n. Например, можем да вземем $\zeta_{r^n} = h \in B$. Елементът h се счита като елемент от груповата алгебра RB и в RB той е корен на полином $x^{r^n} - 1$, но h не е корен на полином от по-ниска степен от r^n. Следователно, $[R[\zeta_{r^n}] : R] = r^n$. Ще отбележим, че ζ_{r^n} удовлетворява условието, което е посочено в [D7]. Също така ще отбележим, че броят на елементите от ред r^n в цикличната група $< h >$ е $\varphi(r^n) < r^n$. Следователно, в израза на $W_{\alpha,q}(U(RG))$ от предложение 10 участва числото

$$a(r^n) = \varphi(r^n)/[R[\zeta_{r^n}] : R] = \varphi(r^n)/r^n.$$

Оттук виждаме, че $a(r^n)$ е дробно число, т.е. получаваме противоречието, че $W_{\alpha,q}(U(RG))$ е дробно число. Следователно предложение 10 от [D7] няма смисъл и резултатът на това предложение е невалиден.

Ще отбележим добре известното разлагане $U(RG) = R^* \times V(RG)$. Следователно изучаването на $U(RG)$ се свежда до изучаване на $V(RG)$. Пръстенът R се нарича p-съвършен, ако $R^p = R$, където $R^p = \{r^p \quad |r \in R\}$. Също така да отбележим, че в теорема 9 от [D7] Данчев изчислява инвариантите $W_{\alpha,q}(U(RG))$, когато G е p-смесена абелева група, т.е. когато $G_t = G_p$, R е комутативен пръстен с единица с проста характеристика p и q е просто число. За произволна абелева група G и комутативен неразложим p-съвършен пръстен R с единица и проста характеристика p инвариантите $W_{\alpha,p}(V(RG))$, отбеляазани с $h(\alpha, V(RG))$, са изчислени от Моллов и Начев [MN5].

Основните резултати на този параграф са публикувани в работата [KMN1].

Заключение

Преглед на основните резултати

Според автора основните резултати в дисертационния труд са следните:

1) описание на групата $S(RG)$, с точност до изоморфизъм, когато G е крайна абелева p-група и R е директно произведение на комутативни неразложими пръстени с единица, така че p е обратим елемент в R;

2) установяване на структурата на максималната делима подгрупа $dV(RG)$ на $V(RG)$, когато G е p-смесена абелева група и R е директно произведение на m неразложими пръстени с проста характеристика $p \quad (m \in \mathbb{N})$;

3) ако G е директен множител на $V(RG)$, то даваме необходими и достатъчни условия $V(RG)/G$ да е p-група;

4) ако R е директно произведение на m комутативни съвършени пръстени R_i и G е директен множител на $V(R_iG)$ (i=1,2,...m), то даваме пълно описание, с точност до изоморфизъм;

4.1) на максималната делима подгрупа на $V(RG)$, ако всяка двойка (R_i, G) (i=1,2,...m), удовлетворява точно едно от посочените от нас четири необходими и достатъчни условия $V(RG)/G$ да е p-група и

4.2) на $V(RG)$, ако $V(R_iG)/G$, (i=1,2,...m), са просто представени p-групи и пръстенът R е без нилпотентни елементи;

5) ако G е абелева p-група и K е поле от първи род спрямо p, така че $\mathbb{N} \subseteq s_p(K)$, то

5.1) изчисляваме $exp(S(KG)/G)$ и

5.2) доказваме, че ако групата G е сепарабелна абелева p-група, то G е хубава подгрупа на $S(KG)$.

Случаят 5.1) коригира грешна формулировка и доказателство на [Предложение 2, D4], а случаят 5.2) дава коректно доказателство на [D1, Предложение 16 (а)] или [D4, Лема 3].

6) Ако G е абелева група и R е комутативен съвършен пръстен с единица и проста храктеристика p, то подгупата G_p е балансирана в $S(RG)$. Това е коректно доказателство на резултат на Данчев [D3, лема 1];

7) ако G е абелева група и R е краен комутативен пръстен с единица без нилпотентни елементи, то изчисляваме α-тия инвариант на Улм-Каплански

$$f_\alpha(S(RG)/G_p),$$

когато G^{p^α} е крайна група и α е ординално число. Този резултат коригира непълна формулировка и доказателство на теорема 6 на Данчев [D3];

8) посочваме контрапример на главния резултат на една работа на Данчев [D7], в която се изчисляват инвариантите $W_{\alpha,q}(U(RG))$ на групата $U(RG)$. (Инвариантите $W_{\alpha,q}(A)$ са въведени от Уорфилд за абелева група A.);

9) показваме, че много резултати на Данчев от [D1], [D2] и [D4]–[D6] остават недоказани поради съществени пропуски и грешки.

Перспективност на дисертационния труд

Във връзка с резултатите на дисертацията възникват следните глобални въпроси за решаване:

1) ако G е крайна абелева p-група и R е неразложим комутативен пръстен с единица, в който простото число p е обратимо, то да се изследват силовските q подгрупи $S_q(RG)$ за просто число $q \neq p$;

2) да се установи структурата на $S(RG)$, когато G е безкрайно копроизведение на циклични p-групи и R е неразложим комутативен пръстен с единица, в който простото число p е обратимо и

3) да се изчислят инвариантите на Улм-Каплански на групата $S(RG)$, когато G е безкрайна абелева p-група и R е неразложим комутативен пръстен с единица, в който простото число p е обратимо.

Апробация на резултатите

Участие в проекти

• НИ11–ФМИ–004/2011 на Фонд научни изследвания към Пловдивски университет „П. Хилендарски“.

Участие в семинари и международни конференции с доклади

• Научни семинари на катедра „Алгебра“
• Научни семинари на катедра „Алгебра и геометрия“
• XXII Международна научна конференция на съюза на учените в Стара Загора - 7-8 юни, 2012г.
• XIII International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT2012), Pomorie, June 15-21, 2012.

Благодарности

Считам за свой приятен дълг да изкажа сърдечна благодарност на научния ми ръководител проф. дмн Т. Ж. Моллов, който ме въведе в тематиката на груповите алгебри, беше внимателен и толерантен в ръководството на научната ми дейност, за моралната подкрепа и полезните съвети, които ми е давал в научните ми изследвания.

Искрена благодарност изказвам и на проф. дмн Н. А. Начев за ползотворната ни съвместна работа в научните изследвания.

Изказвам благодарност на всички преподаватели от катедра „Алгебра и геометрия“ при ПУ „Паисий Хилендарски“ за положителното отношение към дисертацията.

Благодаря и на д-р А. Голев за помощта му при оформянето на окончателния вид на дисертационния труд в Latex.

Благодаря сърдечно на всички, които в една или друга степен ми помогнаха!

Публикации по дисертационния труд

I. Статии

1. [KV] Kuneva V. N., Maximal divisible subgroups in modular group algebras of p-mixed abelian groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 59, No 9, (2006), 899–902, ISSN 1310–1331, Zbl. 1119.16030.

2. [KMN] Kuneva V. N., Mollov T. Zh., Nachev N. A., Some notes of the unit groups of commutative group algebras, Plovdiv University Scientific Works –Mathematics, vol. 36, No 3, (2009), 67–88, ISSN 0204–5249.

3. [KM] Kuneva V. N., Mollov T. Zh., On the unit groups of commutative modular group algebras, Plovdiv University Scientific Works–Mathematics, vol. 37, No 3, (2010), 67–76, ISSN 0204–5249, Zbl. 1229.16028.

4. [KMN1] Kuneva V. N., Mollov T. Zh. and Nachev N. A., On the unit groups of commutative group algebras, Plovdiv University Scientific Works–Mathematics, (in press), ISSN 0204–5249.

5. [KMN2] Kuneva V. N., Mollov T. Zh. and Nachev N. A., Sylow p-subgroups of commutative group algebras of finite abelian p-groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65, No 9, (2012), 1161–1166, ISSN 1310–1331. IF(2011): 0.210.

II. Доклади

1. Kuneva V. N., Mollov T. Zh. and Nachev N. A., Sylow p-subgroups of commutative group algebras of finite abelian p-groups, Science and Technologies, Natural and Math. Sci., vol. II, No 3, (2012), 127–129.

2. Kuneva V. N., Mollov T. Zh. and Nachev N. A., Sylow p-subgroups of commutative group algebras of finite abelian p-groups, Proc. Intern. Workshop ACCT-12, Pomorie, Bulgaria, 15–21 June, (2012), 213–216.

III. Цитати

Статия

[KV] Kuneva V. N., Maximal divisible subgroups in modular group algebras of p-mixed abelian groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 59, No 9, (2006), 899–902, ISSN 1310–1331, Zbl. 1119.16030.

е цитирана в следните публикации:

1. Mollov T. Zh., Nachev, N. A., Unit groups of commutative group algebras, International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 1, No 2, (2010), 163–175, http://math.uctm.edu/iejpam/.

2. Danchev P.V., Maximal divisible subgroups in modular group rings of p-mixed abelian groups, Bull. Braz. Math. Soc., (N. S.), vol. 41, No 1, (2010), 63–72.

3. Danchev P.V., Maximal divisible subgroups in p-mixed modular abelian group rings, Communication in Algebra, vol. 39, (2011), 2210–2215, Zbl. 1238.16031.

Литература

[B1] Berman S. D., Group algebras of countable abelian p-groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR , vol. 175, No 3, (1967), 514–516.

[B2] Berman S. D., Group algebras of countable abelian p-groups, Publ. Math. Debrecen, vol. 14 , (1967), 365–405.

[BR] Berman S. D., Rossa A. R. , The Sylow p-subgroup of a group algebra of a countable abelian p-group, (in Ukrainian), Dopovidi Akad.Nauk. Ukrain. RSR SerA ,(1968), 870–872.

[BR1] Berman S. D., Rossa A. R. , The Sylow p-subgroups of the group algebras of countable abelian p-groups, (in Russian), Proc. of the XXIX Scientific Conference of Professors and Instructors of the Staff of the Uzhgorod University, Dept. of Mathematical Sciences, Uzhgorod, (1975), 158–176.

[ChP] Chatzidakis Z., Pappas P. , Units in abelian group rings, J. London Math. Soc. (2), vol. 44, (1991), 9–23.

[D1] Danchev P. V., Sylow p-subgroups of abelian group rings, Serdica Math. J., vol. 29, (2003), 33–44. (Zbl. 1035.16025).

[Dg] Danchev P.V., Maximal divisible subgroups in modular group algebras of p-mixed and p-splitting Abelian groups, Radovi Matematički, vol. 13, (2004), 23–32.

[D2] Danchev P. V., Torsion Completeness of Sylow p-subgroup of Semisimple Group Rings, Acta Math. Sinica, vol. 20, (2004), 893–898. (Zbl. 1080.16022).

[D3] Danchev P. V., Ulm-Kaplansky invariants for $S(RG)/G_p$, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, vol. 32, No 2, (2004), 133–144. (Zbl. 1067.16054).

[D4] Danchev P. V., Ulm-Kaplansky invariants of $S(KG)/G$, Bull. Polish Acad. Sci., Math., vol. 53, No 2, (2005), 147–156. (Zbl. 1107.16030).

[D5] Danchev P. V., On the trivial units in finite commutative group rings, Math. Commun., vol. 10, (2005), 143–147. (Zbl. 1097.16007).

[D6] Danchev P. V., Trivial Units in Commutative Group Algebras, Extracta Math., vol. 23, No 1, (2008), 49–60.

[D7] Danchev P. V., Warfield invariants in commutative group rings, Journal of Algebra and Its Applications, vol. 8, No 6, (2009), 829–836.

[D8] Danchev P.V., Maximal divisible subgroups in p-mixed modular abelian group rings, Communication in Algebra, vol. 39, (2011), 2210–2215, Zbl. 1238.16031.

[F] Fuchs L., Infinite abelian groups, vol. I and II, Mir (Moscow), (1970 and 1973).

[H] Hunter, Roger; Richman, Fred; Walker, Elbert. Warfield modules, (in English) [A] Abelian Group Theory, Proc. 2nd New Mex. State Univ. Conf., Las Cruces 1976, Lect. Notes Math. 616, (1977), 87–123.

[K] Karpilovsky G. , Commutative group algebras, Marcel Dekker, Inc., New York, (1983).

[K1] Karpilovsky G. , Unit groups of group rings, Longman Scientific and Technical (1989).

[KV] Kuneva V. N., Maximal divisible subgroups in modular group algebras of p-mixed abelian groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 59, No 9, (2006), 899–902, ISSN 1310–1331.

[KMN] Kuneva V. N., Mollov T. Zh., Nachev N. A., Some notes of the unit groups of commutative group algebras, Plovdiv University Scientific works–Mathematics, vol. 36, No 3, (2009), 67–88, ISSN 0204–5249.

[KM] Kuneva V. N., Mollov T. Zh., On the unit groups of commutative modular group algebras, Plovdiv University Scientific works–Mathematics, vol. 37, No 3, (2010), 67–76, ISSN 0204–5249.

[KMN1] Kuneva V. N., Mollov T. Zh., Nachev N. A., On the unit groups of commutative group algebras, Plovdiv University Scientific works–Mathematics, (in press), ISSN 0204–5249.

[KMN2] Kuneva V. N., Mollov T. Zh., Nachev N. A., Sylow p-subgroups of commutative group algebras of finite abelian p-groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65, No 9, (2012), 1161–1166, IF(2011): 0.210.

[May] May W., Commutative group algebras, Trans. Amer. Math Soc., vol. 136, (1969) 139–149.

[May0] May W., Modular group algebras of totally projective p-primary groups, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 76, No 1, (1979), 31–34.

[May1] May W., Modular group algebras of simply presented abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 104, No 2, (1988), 403–409.

[MMN] May W., Mollov T. Zh., Nachev N. A., Isomorphism of modular group algebras of p-mixed abelian groups, Communications in Algebra, vol. 38(06), (2010), 1988–1999.

[M1] Mollov T. Zh., Ulm invariants of the Sylow p-subgroups of the group algebras of the abelian groups over a field of characteristic p, (in Russian), Sixth Congress of the Bulgarian Mathematicians, Varna, Reports Abstracts, Section A2, p.v2. (1977).

[M2] Mollov T. Zh., Ulm invariants of the Sylow p-subgroups for the group algebras of the abelian groups over a field of characteristic p, (in

Russian), PLISKA, Stud. Math. Bulg., vol. 2, (1981), 77–82.

[M3] Mollov T. Zh., On multiplicative groups of semisimple group algebras of abelian p-groups, (in Russian), Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 35, (1982), 1619–1622, ISSN 1310–1331.

[M4] Mollov T. Zh., On multiplicative groups of real and rational group algebras of abelian p-groups, (in Russian), Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 37, (1984), 1151–1153, ISSN 1310–1331.

[M5] Mollov T. Zh., Sylow p-subgroups of the group of the normalized units of semisimple group algebras of uncountable abelian p-groups, (in Russian), Pliska Stud. Math. Bulgar., vol. 8, (1986), 34–46.

[M6] Mollov T. Zh., Multiplicative groups of semisimple group algebras, (in Russian), Pliska Stud. Math. Bulgar., vol. 8, (1986), 54–64.

[M7] Mollov T. Zh., Ulm–Kaplansky invariants of Sylow p-subgroups of normalized units of semisimple group algebras of infinite separable abelian p-groups, (in Russian), Pliska Stud. Math. Bulgar., vol. 8, (1986), 101–106.

[MN] Mollov T. Zh., Nachev N. A., Unit groups of commutative group rings, Communications in Algebra, vol. 34, (2006), 3835–3857.

[MN2] Mollov T. Zh., Nachev N. A., Isomorphism of commutative group algebras of finite abelian groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 63, No 12, (2010), 1701–1706, ISSN 1310–1331.

[MN3] Mollov T. Zh., Nachev, N. A., Unit groups of commutative group algebras, International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 1, No 2, (2010), 163–175, http://math.uctm.edu/iejpam/.

[MN4] Mollov T. Zh., Nachev N. A. , Group of normalized units of commutative modular group rings, Annales des sciences mathematiques du Québec, vol. 33, No 1, (2010), 30–44.

[MN6] Mollov T. Zh., Nachev N. A., Isomorphism of commutative group algebras of finite abelian groups, Plovdiv University Scientific works–Mathematic vol. 38, No 3, (2011), 87–101.

[N1] Nachev N. A., Ulm–Kaplansky invariants of the group of the normalized units of group algebras of abelian p-groups over a commutative ring in which p is an unit, (in Russian), Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 33, (1980), 1585–1587.

[N2] Nachev N. A., Ulm–Kaplansky invariants of the group of the normalized units of group algebras of abelian p-groups over a commutative ring in which p is an unit, (in Russian), Pliska Stud. Math. Bulgar., vol. 8, (1986), 21–33.

[N4] Nachev N. A., Invariants of the Sylow p-subgroup of the unit group of a commutative group ring of characteristic p, Communications in Algebra, vol. 23, No 7, (1995), 2469–2489.

[N6] Nachev N. A., Nilpotent elements and idempotents in commutative rings, Communications in Algebra, vol. 33, (2005), 3631–3637.

[N7] Nachev N. A., Torsion elements in commutative indecomposable rings, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65, No 8,(2012), 1019–1022.

[NM1] Nachev N. A., Mollov T. Zh., Unit groups of semisimple group algebras of abelian p-groups over field, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 46, (1993), 17–19, ISSN 1310–1331.

[NM2] Nachev N. A., Mollov T. Zh., Unit groups of semisimple group algebras of abelian p-groups over a field, J. Algebra, 188, (1997), 580–589.

[W] Warfield R. B., Classification theorems for p-groups and modules over a discrete valuation ring, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 78, No 1, (1972), 88–92.

Съдържание