РЕЦЕНЗИЯ

от д-р Ангел Борисов Дишлиев - доцент в Химикотехнологичен и металургичен университет

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен "доктор" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Диференциални уравнения

Автор: Кремена Василева Стефанова

Тема: Качествени методи за някои специални видове диференциални уравнения

Научен ръководител: проф. дмн Снежана Георгиева Христова - Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № Р33-2694 от 23.07. 2012 г. на Ректора на Пловдивския университет "Паисий Хилендарски" съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема "Качествени методи за някои специални видове диференциални уравнения" за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Диференциални уравнения. Автор на дисертационния труд е ас. Кремена Василева Стефанова – докторантка на самостоятелна подготовка към катедра Математически анализ с научен ръководител проф. дмн Снежана Георгиева Христова от Пловдивски университет "Паисий Хилендарски".

Представеният от ас. Кремена Василева Стефанова комплект материали на хартиен носител е в съответствие с Чл. 36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на Пловдивски университет, включва следните документи:

- молба до Ректора на Пловдивски университет за разкриване на процедурата за защита на дисертационен труд;

- автобиография в европейски формат;

- копие от диплома за висше образование, специалност "Математика", серия ПУ-2010, у.н. № 033526, регистрационен № 4385 (ОКС 'бакалавър');

- копие от диплома за висше образование, специалност "Бизнес информатика с английски език", серия ПУ-2011, у.н. № 045462, регистрационен № 1177 (ОКС 'магистър');

- заповед за записване в докторантура, № Р 33-4111/ 21. 11. 2011 г.;

- заповед № Р 33-477/14. 02. 2012 г. за видоизменяне на заповед за записване в докторантура;

- заповед за провеждане на изпит от индивидуалния план, № 57/ 20. 04. 2012 г.;

- протокол за издържан изпит по специалността с успех отличен(5.50);

- протокол 6-2011/2012/ 19. 06. 2012 г. от катедрен съвет, свързан с откриване на процедурата за предварително обсъждане на дисертационния труд;

- заповед за разширяване на катедрен съвет във връзка с предварително обсъждане на дисертационния труд, № Р 33-2064/ 26. 06. 2012 г.;

- протокол от катедрен съвет за предварително обсъждане на дисертационния труд, № 8 – 2011/2012/ 04. 07. 2012 г.;

- заповед за отчисляване от докторантура, № Р 33-2640/ 19. 07. 2012 г.;

- списък на всички научни публикации, доклади и участия в проекти;

- удостоверение от НПД при Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" за участие в образователни и изследователски проекти, № НПД 137/ 02. 07. 2012 г.;

- сертификат за изнесен доклад по покана, Gebze Institute of Technology, 29. 06. 2012 г.;

- дисертационен труд;

- автореферат;

- списък на научните публикации по темата на дисертацията;

- списък на докладите по темата на дисертацията;

- копия на научните публикации;

- списък на забелязани цитирания;

- декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;

- справка за спазване на специфичните изисквания на съответния факултет;

- грамота на Съюза на учените – Пловдив за високи научни постижения на млади матема-тици.

Докторантката е приложила 5 броя публикации.

Всички документите са подготвени и са представени акуратно.

2. Кратки биографични данни за докторантката

Кремена Стефанова е завършила висше образование както следва:

- бакалавърска степен, специалност "Математика" в Пловдивски униввеpситет "Паисий Хилендарски" с отличен успех;

- магистърска степен, специалност "Бизнес информатика с английски език" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" с отличен успех.

Понастоящем е асистент в същия университет.

Владее (на различни нива) английски, немски и испански език. Има впечатляващи компютърни познания, включващи различни операционни системи, програмни езици и програмни продукти, намиращи широко приложение.

Научните ѝ интереси са свързани с фундаменталната теория, качествената теория и приложенията на някои специални класове диференциалните уравнения. По-конкретно, нейните изследвания са насочени към диференциалните уравнения с максимуми и съответните им интегрални, интегрално-сумационни и диференциални неравенства. Автор е на 13 научни труда, които формално бих разпределил както следва:

- 2 статии в списания с импакт фактор;

- 5 статии в периодични научни списания;

- 3 статии в доклади на международни конференции в България;

- 3 статии в доклади на международни конференции в чужбина.

Две от споменатите по-горе статии са самостоятелни. Изнесла е общо 12 научни доклада. Участва в разработването на два научни проекта към НПД на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски". Носител е на множество награди и стипендии, от които бих отличил специалната награда за докторант, получена на конкурс за високи научни постижения за млади математици, обявен от СУБ – Пловдив.

Извод: Това е впечатляваща научна биография на един млад (25 годишен) математик!

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

В дисертационния труд, основен обект на изследване са диференциалните уравнения с максимуми. Те представляват специален клас функционално-диференциални уравнения. Техна характерна особеност е, че всяко едно от решенията им във всеки текущ момент зависи от максималната стойност на същото това решение, пресметната в предварителен времеви интервал. Намирането на условия, които гарантират съществуването на решения на уравненията с максимуми, а също така и притежаването на традиционни качества на тези решения са важни въпроси, на които в дисертацията е отделено сериозно внимание. В общия случай, намирането в явен вид на решенията на такива уравнения е невъзможно (дори и за сравнително прости класове, каквито са линейните уравнения). Това обстоятелство засилва влиянието на качествените и приближените методи на изследване на уравненията с максимуми.

За начало на математическата теория на тези уравнения се счита работата на А. Магомедев, публикувана в Известия на академията на науките на Азербайджан през 1977 г. В работата са формулирани няколко основни проблеми, свързани със съществуване на решения на този клас уравнения. Математическото моделиране на процеси от практиката с помощта на уравненията с максимуми, както е отбелязано в увода на дисертацията, стартира сравнително по-рано през 1966 г. в монографията на Е. Попов. В България първите изследвания, свързани със съществуване, единственост, приближено аналитично намиране и притежаване на определени качества на тези решения на начални на уравненията с максимуми са в началото на 80-те години на миналия век (1980 г.). Пионерните работи в България са свързани с имената на Друми Байнов и Мария Аролска. Освен споменатите по-горе учени, резултати по дискутираната тема са получени още и от следните български изследователи: Снежана Христова, Васил Ангелов, Христо Вулов, Димитър Мишев, Васил Петров, Валентина Пройчева, Андрей Захариев, Асен Рахнев, Ангел Голев, Любомир Георгиев, Светла Милушева, Емил Минчев, Атанаска Георгиева, Недялка Казакова, Иванка Стамова, Галина Сарафова, Павел Симеонов, Недялка Маркова и не на последно място Кремена Стефанова (общо 21 учени, от които 10 са от Пловдивски униерситет "Паисий Хилендарски"). През миналата година беше публикувана и първата монография върху уравненията с максимуми, за наша радост от водещи български специалисти в областта: Друми Байнов и Снежана Христова.

Във връзка с приложенията на уравненията с максимуми, научният интерес към тях в последните десетина години видимо нараства. Качествените им свойства са отразени в творчеството на водещи учени в чужбина, като А. Самойленко, В. Плотников, M. Pinto, J. Nieto, B. Zhang и др.

В дисертацията са разгледани някои аспекти на фундаменталната и качествената теория на диференциалните уравнения с импулси. Специфична особеност за тези уравнения е, че техната траектория (интегрална крива) е прекъсната. По начина, по който се определят импулсните моменти, т.е. моментите, в които решението е прекъснато, импулсните уравнения могат да се класифицират на няколко типа. Тук са разгледани уравнения с фиксирани моменти на импулси.

Както е известно, началото на теорията е поставено от работата на В. Мильман и А. Мышкис от 1960 г., публикувана в Сибирски математически журнал. Досега от български учени са публикувани общо 10 монографии, посветени на фундаменталната и качествената теория на този тип уравнения. В България са защитени повече от 30 дисертации и са публикувани над 300 научни статии в международни научни списания по тази тема. Приложенията на уравненията с импулси са общоизвестни. Вероятно това е основната причина, поради която в световен мащаб научният интерес към тях постоянно се разширява и тематично обогатява.

Определено считам, че темата на дисертационния труд е актуална.

4. Познаване на проблема

Считам, че ас. Кремена Стефанова познава добре съвременното състояние, степента на развитие, нерешените проблеми, специфичните трудности и др. подобни проблеми, които възникват при изучаването на уравненията с максимуми. Убеден съм, че тя е усвоила терминологията и идеите от единственото досега сравнително пълно съчинение по темата на дисертацията: "*Differential equations with maxima*", на което един от авторите е нейната научна ръководителка.

Видно е, че познава литературата и постигнатите резултати от други автори, посветени на изследваните обекти в дисертационния труд.

5. Методика на изследването

Методите на математическия анализ са единствените, с помощта на които може да се постигнат формулираните цели и решат конкретните задачи в дисертационния труд. Точно те са използвани в изследванията на докторантката.

Ще отбележим, че основна част от дисертационния труд е посветена на изграждане на подходящ математически апарат за изследване на уравненията с максимуми. Това са обобщенията на класове интегрални неравенства на един аргумент, обобщения на неравенствата на Gronwall-Bellman и Bihari за функции на два аргумента, неравенства, отнасящи се за прекъснати функции и др. Подготвеният математически апарат под формата на описаните по-горе специфични функционни неравенства е основа за изследванията във втората част на дисертацията, посветена на намирането на достатъчни условия за съществуване, единственост, ограниченост, непрекъсната зависимост, устойчивост и др. качества на решенията на класове обикновени и частни диференциални уравнения с максимуми.

Избраният подход е правилен и води до адекватни отговори на поставените задачи.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е структуриран в увод, четири глави, авторска справка за приносите, перспективи за развитие, апробация и публикации по темата, декларация за оригиналност и библиография от 121 заглавия. Дисертацията е поместена на 127 страници. Трудът е оформен грижливо и внимателно. Ясно са подчертани произхода и авторите на описаните резултати. Това дава възможност точно да се преценят заслугите на докторантката. Материалът е представен в логична последователност, която допълнително облекчава четенето, запознаването и вникването в идеите на дисертационния труд. Самият запис на дефинициите, теоремите и доказателствата е професионален.

Основни обекти на изследване са диференциалните уравнения с максимуми, импулсните диференциални уравнения и линейни параболични частни диференциални уравнения. При първия тип уравнения, дясната страна на системата зависи от три фактора: времето, неизвестната функция и максимума на неизвестната функция в определен предварителен (спрямо текущото време) затворен интервал. При втория тип уравнения, решението е подложено на дискретни във времето импулсни въздействия. Това практически означава, че в дадени моменти, решението е прекъснато, като допълнително са указани големините на "импулсните скокове". При третия тип уравнения, максималната стойност на решението (по едната от независимите променливи) участва във формирането на външното въздействие.

Основните трудности при изучаване на споменатите по-горе диференциални уравнения са свързани с техните специфични особености.

Така например наличието на максималната стойност на решението, като аргумент на дясната страна, води до:

- Загуба на свойството линейност на уравненията с максимуми;
- Непреодолими трудности при търсенето на решението в затворена форма.

Някои от специфичните особености, свързани с изследването на уравненията с фиксирани моменти на импулси, са следните:

- Прекъснатост на решението на съответната начална задача: Точките на прекъсване са от първи род, т.е. „скокът” е ограничен. Обикновено се предполага, че решението е непрекъснато отляво в точките на импулсно въздействие;
- Сливане на решения: Обикновено сливанията се осъществяват след импулсни въздействия върху поне едно от сливащите се решения.

Глава 1. Има встъпителен характер. За пълнота и удобство на читателя са формулирани класическите неравенства на Gronwall-Bellman и Bihari, а също така няколко от най-често срещаните и важни за практиката техни следствия. Описани са диференциалните уравнения с максимуми и са разгледани няколко подходящи въвеждащи примери.

Глава 2. Резултатите, получени в главата, считам за основни в дисертационния труд. Доказани са редица функционни линейни неравенства, като общото между тях е:

- Лявата страна се състои от неизвестната функция (при интегралните неравенства, а също и при интегрално-сумационните неравенства) или от нейната производна (при диференциалните неравенства);
- В дясната страна участва максималната (в някои случаи и минималната) стойност на неизвестната функция, пресметната в предварителен спрямо настоящия момент, затворен интервал;
- Дясната страна е линейна относно неизвестната функция и нейния максимум;
- Като частен случай от получените в дисертацията резултати се получават класически интегрални или диференциални неравенства.

Намерените неравенства можем да класифицираме по следните критерии:

- Интегрални, диференциални или интегрално-сумационни:
  - При интегралните неравенства лявата страна съвпада с неизвестната функция, а дясната страна съдържа под знака на интеграла търсената функция и нейния максимум;
  - При диференциалните неравенства лявата страна съвпада с производната на неизвестната функция, а дясната страна е линейна относно търсената функция и нейния максимум;
  - При интегрално-сумационните неравенства лявата страна съдържа търсената функция, а дясната страна съдържа два типа събираеми. Първият тип събираеми са интеграли от неизвестната функция и нейната максимална стойност. Вторият тип са суми, в които броят на събираемите зависи от текущия момент, а всяко събираемо е теглова стойност на неизвестната функция. Стойностите се пресмятат в предварително фиксирани моменти.
- На една или две променливи (определя се от броя на променливите на неизвестната функция);
- Непрекъснати или прекъснати неравенства (отново в зависимост от качествата на неизвестната функция);
- В зависимост от качествата на известните функции, които участват в неравенствата адитивно или като коефициенти: постоянни функции, монотонни функции, непрекъснати функции и т.н.;

- В зависимост от степените на неизвестната функция, с които участва в неравенствата и др.

Част от неравенствата са илюстрирани с подходящи, сравнително облекчени примери. Получени са и са анализирани числови данни на функциите, участващи в неравенствата. За тази цел е подготвен специален програмен продукт.

Глава 3. Резултатите в главата отново класифицирам като основни. Посветени са на обосноваването на нелинейни функционни интегрални неравенства. Характерни общи черти на неравенствата, разгледани в тази глава, са следните:

- Лявата страна съвпада с неизвестната функция или с обратима функция, чийто аргумент е неизвестната функция;
- Дясната страна съдържа интеграл под знака на който участва нелинейно неизвестната функция. Възможно е тази обратима функция да е степенна;
- Дясната страна съдържа интеграл под знака на който участва нелинейно максималната стойност на неизвестната функция, пресметната в отминал затворен интервал;
- В частност може да се покаже, че неравенствата се израждат в неравенства от типа на Bihari.

Различията на намерените неравенства се определят от:

- Броя на независимите променливи на неизвестната функция (един или два);
- Типа на известните адитивни функции, които може да са: константи, монотонни, непрекъснати, прекъснати и т.н.;
- Типа (класа на който принадлежат) нелинейните функции с аргументи неизвестната функция или нейната максимална стойност;
- Степента на неизвестната функция, с която същата участва в неравенството и др.

Доказателствата на теоремите са технически сложни и изискват внимателен подход. На първо място това се отнася при структурирането на отделните части на доказателствата и тяхната последователност на изпълнение. На второ място, внимателно трябва да се извършват доказателствата на отделните части. На пръв поглед условията, които се изискват, са многобройни. Това обстоятелство има своето обяснение по две причини: На първо място участващите в предполагаемите неравенства функции са сравнително много на брой. Така например, в първата (и сравнително най лека) теорема от глава 2 – Теорема 3.1.1 участват 8 на брой известни функции и 3 фиксирани константи. За всеки един от тези обекти се изискват естествени условия, свързани с топологията на взаимната им връзка. На второ място това са условия, които са допълнителни и служат за установяване на желаните неравенства. Проследяването на доказателствата показва, че няма условия, които "така да се каже са в повече". Намирането на примери, които показват, че условията са необходими не е лека задача. Освен това, за всяка теорема ще са необходими солиден брой съпровождащи контра примери, което би увеличило значително обемът на дисертационния труд. Поради тези причини не мога да препоръчам включването на такива примери в рецензирания труд.

Илюстриращите примери, както и в предходната глава, са достатъчно.

Глава 4. Резултатите от предходните две глави са приложени върху решенията на обикновени и частни диференциални уравнения, съдържащи максимуми на неизвестната функция. Разгледани са основни въпроси от фундаменталната и качествената теория на този тип уравнения.

В първия параграф на главата се изучава класически вариант на нелинейно диференциално уравнение с максимуми. Чрез леснопроверими естествени условия (основните от които са свързани с контролиране на ръста на скоростта на изменението на решението) са установени: единственост на решението, ограниченост (по-точно област на съществуване на решението) и непрекъсната зависимост от началните условия.

Вторият параграф на последната глава е посветен на изследването на качествата на решенията на частни параболични нехомогенни диференциални уравнения с постоянни коефициенти и с максимуми. Максимумите се отразяват във външните въздействия. В Теорема 4.2.1 при основно предположение, че ръстът на дясната страна на уравнението не надминава квадратен корен от ръста на аргументите, свързани с решението и неговия максимум, е получена оценка за ръста на същото това решение. Тук функцията φ_1 е частен случай или по-точно изразява се чрез функцията ψ . Предполагам, че присъствието на споменатата функция φ_1 е с цел да се опрости записа на получените оценки. Във втората теорема от параграфа, ръстът на дясната страна на уравнението не надминава ръста на споменатите аргументи. Считам, че резултатите в този параграф макар и очаквани са важни и интересни.

Третият параграф се отнася за качествата на решенията на нелинейни импулсни диференциални уравнения със супремуми. Тук терминът "супремум" е подходящо използван, тъй като решенията на разглеждания тип уравнения са прекъснати функции. Следователно е възможно, точната горна граница на решението (дори и в затворен интервал, както е в случая) да не е достижима. Разглеждат се уравнения с фиксирани моменти на импулси. Отново с помощта на намерените интегрално-сумационни неравенства в предходните глави са получени достатъчни условия за ограниченост и практическа устойчивост на решенията на този тип диференциални уравнения. Разгледани са няколко варианта на класове на принадлежност на десните страни на уравненията и импулсните функции. Класовете се дефинират в зависимост от степента на ограниченост на функциите относно фазовите аргументи. Считам, че получените резултати са съществени. Тук са съчетани идеите както на уравненията с импулси, притежаващи прекъснати решения, така и на уравненията със супремуми, при които решенията зависят и то съществено от точната си горна граница в предходни интервали. Тук е извършена сериозна изследователска работа в много направления:

- Решаване на подходящи интегрални неравенства със супремуми;
- Решаване на подходящи интегрално-сумационни неравенства със супремуми;
- Избор на ограничения, свързани със степените на ограниченост на десните страни и импулсните функции на съответните уравнения с импулси и супремуми;
- Представяне на решенията в подходяща интегрално-сумационна форма и др.

В последния параграф се изследва въпроса за приближено намиране (в непрекъсната форма) на приближения към решенията на гранични задачи за нелинейни уравнения с максимуми. Поставената задача е полезна за практиката, защото, както споменахме по-горе, намирането в явен вид на решенията на тези задачи (дори за сравнително прости уравнения, каквито са линейните хомогенни уравнения от първи ред) е непостижима цел. В това отношение, намирането на долни и горни решения на същите задачи е сравнително по-проста задача. Конструирани са две редици от функции, които удовлетворяват следните изисквания:

- Функциите от първата редица са долни решения;
- Функциите от втората редица са горни решения;
- Редиците са съответно монотонно растяща и монотонно намаляваща;
- Всяко долно решение е по-малко от всяко горно решение;

- Редиците са равномерно сходящи;
- Граничните функции са решения на изходната гранична задача.

При решаването на поставената задача ас. Кремена Стефанова е проявила завидна изобретателност и находчивост при формирането и решаването на последователност от подходящо подбрани “мини-задачи”. Очевидно тя разполага със сериозна широта на изследователските си възможности. Притежава чувството да се отдалечи от детайлите и “да погледне от по-високо равнище” същността на проблема.

Доказателствата на твърденията са пълни, строги, последователни, без излишества, държащи читателя в постоянно напрежение и изискващи от същия този читател вникване в същността на проблема. Не се съмнявам в тяхната достоверност. Достатъчният брой примери илюстрира няколко факта:

- Приложимост на резултатите;
- Проверяемост на условията;
- Достоверност на резултатите;
- Валидност на резултатите в често срещани сравнително прости уравнения и др.

В авторската справка са отразени накратко резултатите, постигнати от докторантката в дисертацията.

В переспективите за развитие авторката е прогнозирала възможни изследвания, които е естествено да се проведат в бъдеще. От една страна тези последващи изследвания ще обогатят математическия апарат (под формата на интегрални, диференциални и др. видове неравенства) за изследване на диференциалните уравнения с максимуми. От друга страна са посочени бъдещи насоки на развитие на фундаменталната и качествената теория на разглежданите от авторката класове диференциални уравнения.

Декларацията за оригиналност на резултатите отговаря на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Голяма част от приносите бяха посочени в предходните части от рецензията. Постиженията имат предимно научен характер. Отнасят се до:

1. Изработване на подходящ математически апарат за фундаментално и качествено изследване на специални класове диференциални уравнения;
2. Приложения на изградения апарат при изследване на тези класове уравнения.

Практически дисертацията може да бъде продължена в много направления, свързани с намирането на нови типове неравенства с максимуми и приложенията им при приближено намиране и изследване на качествата на решенията на различни класове уравнения с максимуми.

Следователно, моята преценка е, че резултатите имат и ще имат благотворно влияние върху изследванията както на докторантката, така и на други изследователи.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Научните публикации по темата на дисертацията са общо 5 на брой и представляват научни статии. Лесно може да се покаже, че е невъзможно тези статиите да са използвани в други процедури за придобиване на научни степени или заемане на академични длъжности. Научните резултати от публикациите и техните доказателства представляват съществени части от дисертационния труд. В тези публикации не са отразени само §2.3 и §4.4 от дисертацията, които, както е отбелязано накрая на дисертационния труд, са нови. Поради споменатата причина, съдържанието и оценка на публикуваните изследвания няма да бъдат представени в рецензията.

По значимост бих класифицирал публикациите, както следва:

- две статии в научни списания с импакт-фактор: *Funkcialaj Ekvacioj* (IF 0,634) и *Mathematical Inequalities and Applications* (IF 0,555). Общият импакт-фактор е 1,189;

- две статии в международни научни списания: *European J. of Pure and Applied Mathematics* и *International Electronic J. of Pure and Applied Mathematics;*

- една статия в сборник от доклади на международна конференция: *Constanta, Rumania.*

Една от публикациите е самостоятелна, три са в съавторство с научния и ръководител и една е с още двама съавтори.

Работите са публикувани в рамките на последните две години. Считам, че това е основната причина досега да е забелязано едно тяхно цитиране.

9. Лично участие на докторантката

Не се съмнявам в същественото участие на Кремена Стефанова в проведените изследвания, предмет на настоящето обсъждане. Това мое мнение е подкрепено и от представената декларация на нейната научна ръководителка, относно равните заслуги в изследванията по темата на дисертацията.

10. Автореферат

Авторефератът заедно с литературата е поместен на 48 страници. Съдържа всички основни резултати в дисертационния труд. От това следва, че отразява напълно приносите на докторантката. Отчетливо са формулирани поставените цели и конкретни задачи. Основните понятия и твърдения в дисертацията са представени съответно под формата на дефиниции и теореми (без доказателства). Предложените примери илюстрират получените твърдения и дават възможност за дообмисляне на идеите в дисертационния труд

Авторската справка резюмира основните приноси.

Авторефератът е изготвен съгласно изискванията. Допълнително бих добавил, че е подготвен във форма, която позволява на читателя, който не е запознат с дисертацията, да придобие пълна представа за постигнатото в нея.

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки, които да са извън моите лични предпочитания. Считам, че този тип бележки (лични предпочитания) не трябва да бъдат предмет на дискусия. Позволявам си да изразя мнение, че дисертацията надхвърля общоприетия обем на такъв тип научни трудове. Също така, включените научни публикации са повече от необходимия брой.

12. Лични впечатления

Познавам ас. К. Стефанова като жизнерадостна, любознателна и професионално ангажирана изследователка. Тя напълно покрива моите представи за перспективен млад учен. Щях да забравя – притежава великолепно чувство за хумор.

13. Препоръки за бъдещо използване на дисертационните приноси и резултати

Бих насочил вниманието към бъдещи изследвания в посока, която е характерна само за диференциалните уравнения с максимуми. Във връзка с това си позволявам да формулирам следното направление на евентуални бъдещи изследвания:

Нека максимумът на решението на изследваното диференциално уравнение (с максимум) в интервала $\left[t-d,t\right]$, където t е текущият момент, а d е положителна константа, се достига в точката $t^{\max}=t^{\max}\left(t,d\right)$. Решението на съответната начална задача (с начално условие $x\left(t\right)=\varphi\left(t\right),\ t\in\left[t_0-d,t_0\right]$, където φ е дадена функция с определени качества) да означим с $x\left(t;t_0,\varphi,t^{\max}\right)$. Нека за всяко $t\in\left[t_0,T\right]$ точката $t^{\max*}$ е приближение на $t^{\max}$. Ще казваме, че решението на разглежданото уравнение зависи непрекъснато от точката на максимум, ако

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\forall t_0\in R^{+}\right)\left(\forall T>t_0\right)\left(\forall d>0\right)\left(\forall\varphi\in C^{1}\left[t_0-d,t_0\right]\right)$$
$$\left(\exists\delta=\delta\left(\varepsilon,t_0,T,d,\varphi\right)>0\right):\ \left(\forall t^{\max*}\ge t_0,\ \left|t^{\max*}-t^{\max}\right|<\delta\right)$$
$$\Rightarrow\left\|x\left(t;t_0,\varphi,t^{\max*}\right)-x\left(t;t_0,\varphi,t^{\max}\right)\right\|<\varepsilon\ \ при\ \ t_0\le t\le T\,.$$

Задачата е да се намерят достатъчни условия за този вид непрекъсната зависимост. Подобна задача може да се формулира и за устойчивост. Разбира се могат да се изучават аналогични задачи за всички производни непрекъснати зависимости и устойчивости, като се добавят качествата “равномерна”, “експоненциална” и т.н.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд *съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката* и отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“. Представените материали и дисертационни резултати напълно съответстват на специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика, приети във връзка с Правилника на Пловдивския университет за приложение на ЗРАСРБ.

Дисертационният труд показва, че докторантката Кремена Василева Стефанова притежава задълбочени теоретични знания и професионални умения по научна специалност Диференциални уравнения, като демонстрира качества и умения за самостоятелно провеждане на научно изследване.

Поради гореизложеното, убедено давам своята *положителна оценка* за проведеното изследване, представено от рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат, постигнати резултати и приноси, и *предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен “доктор”* на Кремена Василева Стефанова в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Диференциални уравнения.

20. 08. 2012 г.

Рецензент: ....

доц. д-р Ангел Дишлиев