РЕЦЕНЗИЯ

от дмн Ангел Борисов Дишлиев – професор

в Химикотехнологичен и металургичен университет - София

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен **„доктор“**

в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление: 4.5. Математика;

докторска програма: Математически анализ;

автор на дисертационния труд: Атанас Василев Илчев

тема на дисертационния труд: Върху някои класове циклични оператори с двойки точки на най-добро приближение

научен ръководител: доцент д-р Боян Георгиев Златанов – Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № Р33-598 от 21.11. 2018 г. на Ректора на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски" (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на описания по-горе дисертационен труд.

Представеният от г-н Атанас Илчев комплект материали на електронен и хартиен носител е в съответствие с чл. 36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ.

Дисертационният труд е поместен на 129 стандартни страници. Състои се от предговор, три глави и библиография. Библиографията включва 56 заглавия.

Докторантът е приложил 5 броя научни статии, публикувани в пълен текст, които са свързани с темата на дисертационния труд. Може да се каже, че дисертацията се основава на тези публикации.

2. Кратки биографични данни за докторанта

През 2016 г. г-н Атанас Илчев завършва образователно-квалификационната степен магистър в ПУ по специалността „Математика, методика на обучението по математика“. Придобива квалификация: „Учител по математика“. Близо 4 години (през периода 2014 г. – 2018 г.) работи като учител по математика (5 – 12 клас) в град Пловдив. За сравнително кратък период от време е редовен докторант към катедра Математически анализ на ПУ. Със заповед Р 33-527 от 12.10. 2018 г. на Ректора на ПУ е отчислен с право на защита.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Известна е фундаменталната роля в много математически науки на теоремата на Банах за свиващите оператори. Нейната роля е фундаментална, както в теоретичен аспект (основно в придобиването на нови теоретични знания под формата на достатъчни условия за съществуване на решения или за съществуване на определени качества на тези решения), така и в приложен аспект (при намиране на решенията или техни приближения за конкретни уравнения или неравенства). Може определено да се каже, че тази теорема представлява важен, а в някои случаи и основен метод за решаване на различни (на пръв поглед) математически задачи като:

- намиране на решения (или техни приближения) на широк кръг уравнения и неравенства (алгебрични, диференциални, интегрални, интегро-диференциални, функционални и т.н.);
- оценка на грешката при замяна на неизвестното решение с конкретни негови приближения;
- определяне на специфични качества на решенията на уравненията или неравенствата (като периодичност, ограниченост, асимптотична еквивалентност и др.);

Привеждането на даден проблем (например някой от изброените по-горе) до решаването на абстрактно уравнение от вида $Tx = x$, където T е свиващ оператор в подходящо избрано метрично пространство, в някои случаи е трудна или невъзможна задача. Поради това се търсят различни обобщения на метода на неподвижната точка за свиващи оператори. Намирането на такива обобщения продължава да е съвременна актуална задача и струва ми се тази тематика ще остане „вечна“.

Представеният дисертационен труд обобщава и обогатява в някои частни случаи неизчерпаемата тема за свиващите изображения и съответните им неподвижни точки.

4. Познаване на проблема

Считам, че докторанта познава отлично състоянието на научния проблем, обект на изследване в представения за рецензиране труд. До този извод достигам, като имам предвид:

- направените от автора сериозни, богати на съдържание и основополагащи предговор и въведение в темата на дисертацията. Действително, при четенето на научния труд не се налага ползването на допълнителна справочна литература, което от една страна е удобно, а от друга потвърждава изказаното по-горе мнение;
- свободното владеене на терминологията по темата и ползването като отправна точка на съвременни научни достижения. Като пример ще посоча изследванията на A. Gupta, S. Rajput, P. Kaurav, публикувани в *International Journal of Analysis and Applications* през 2014 г. и резултатите на W. Sintunavarat, P. Kumam, публикувани в

Fixed Point Theory and Applications през. 2012 г. Тези съвременни публикации са базови за изследванията на автора във втора глава на дисертацията;

- множеството приложения на теоретичните резултати, което подсказва, че теорията е осмислена дълбоко и може да се прилага творчески от докторанта. Тук ще подчертая, че в някои случаи намирането на подходящи примери се оказва сложна и трудна задача. В дисертационния труд този проблем е разрешен напълно.

По този начин косвено установяваме, че изследванията са съвременни и подлежат на оценката на времето (което видимо ще се отрази чрез тяхното цитиране в бъдеще).

5. Методика на изследването

На поставения тук въпрос за методиката на изследването ще отговоря, тъй като спазвам стриктно изискванията за оформяне на рецензиите (съгласно Правилника за развитие на академичния състав на ПУ). Струва ми се, че за дисертациите по математика този въпрос не винаги е удачен. Абстрахирайки се от това мое мнение ще отбележа, че авторът използва традиционните методи на математическия анализ (реален и функционален). Чрез тези методи се създават конкретни (работещи) методи за намиране на приближени решения на нови класове уравнения и неравенства.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Предговорът и първата глава (озаглавена „Въведение“) имат уводен характер.

Според мен основните резултати на докторанта са поместени във втора глава. Преди да формулирам достиженията ще дам няколко въвеждащи дефиниции.

Нека T е оператор, дефиниран в метрично (или нормирано) пространство X с разстояние d. Нека непразните множества $A, B \subset X$ и операторът $T : A \cup B \to A \cup B$. Нека $T(A) \subset B,\ T(B) \subset A$. Тогава операторът T се нарича цикличен. Ясно е, че ако $A \cap B = \varnothing$, то този оператор няма неподвижна точка $x\ (Tx = x)$. В този случай е естествено да се търси такава точка $x \in A$, че разстоянието между x и Tx да е минимално. Лесно се съобразява, че този минимум се ограничава отдолу от разстоянието $d(A, B)$ между множествата A и B. Ако се окаже, че $d(x, Tx) = d(A, B)$, то x се нарича точка на най-добро приближение. Освен това, цикличният оператор T се нарича свиващ, ако

$$\left(\exists \alpha = const,\ 0 \le \alpha < 1\right) : \left(\forall (x, y) \in A \times B\right) \Rightarrow$$
$$d(Tx, Ty) \le \alpha d(x, y) + (1 - \alpha) d(A, B).$$

Двойка свиващи циклични оператори (F, G) дефинираме както следва. Нека операторите $F : A \times A \to B,\ G : B \times B \to A$. Тези оператори са свиващи, ако

$$\begin{gathered}(\exists \alpha,\beta = const,\ \alpha\ge 0,\ \beta\ge 0,\ \alpha+\beta<1):(\forall x,y\in A;\ \forall u,v\in B)\Rightarrow \\ d(F(x,y),G(u,v))\le \alpha d(x,u)+\beta d(y,v)+(1-\alpha-\beta)d(A,B).\end{gathered} \tag{а}$$

Ще казваме, че (x,y), където $x,y\in A$, е наредена двойка точки на най-добро приближение за оператора F, ако

$$d(F(x,y),x)=d(F(y,x),y)=d(A,B).$$

С помощта на операторите F и G за всеки две произволни начални точки $x_0,y_0\in A$ ще дефинираме две редици: $\{x_n\}_{n=0,1,...}$ и $\{y_n\}_{n=0,1,...}$, елементите на които са от метричното пространство (по-точно от множеството $A\cup B\subset X$). Дефинираме:

$$x_{2n+1}=F(x_{2n},y_{2n});\ \ y_{2n+1}=F(y_{2n},x_{2n});\ \ x_{2n+2}=G(x_{2n+1},y_{2n+1});\ y_{2n+2}=G(y_{2n+1},x_{2n+1}), \tag{б}$$

където $n=0,1,...$.

Основният резултат във втора глава утвърждава съществуването на две единствени наредени двойки точки на най-добро приближение:

- $(\xi,\eta)\in A\times A$ за оператора F;
- $(\varphi,\psi)\in B\times B$ за оператора G,

при предположението, че:

- множествата A и B са затворени и изпъкнали;
- метричното пространство е равномерно изпъкнало Банахово пространство със специфичен модул на изпъкналост;
- двойката (F,G) е циклично свиващи оператори.

Освен това:

- Изпълнени са равенствата:
$$\varphi=F(\xi,\eta),\quad \psi=F(\eta,\xi),\quad \xi=G(\varphi,\psi),\quad \eta=G(\psi,\varphi).$$
- Валидни са границите:
$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\xi,\quad \lim_{n\to\infty}y_{2n}=\eta,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\varphi,\quad \lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\psi.$$
- Намерени са оценки на грешката при замяна на точките на най-добро приближение с елементи на итерационните редици, т.е. получени са оценки на разстоянията $d(x_{2n},\xi)$ и $d(y_{2n},\eta)$. По-точно, получени са два типа оценки на израза
$$\max\{d(x_{2n},\xi),\ d(y_{2n},\eta)\}=\max\{\|x_{2n}-\xi\|,\ \|y_{2n}-\eta\|\},\ n=1,2,....$$

  В първата от тях, която авторът нарича “*a priori*”, в горната граница на оценката участва изразът

$$d(x_1,x_0)+d(y_1,y_0)=\|x_1-x_0\|+\|y_1-y_0\|,$$

а във втората, която авторът нарича “*a posteriori*”, в горната граница участва изразът

$$d\left(x_{2n}, x_{2n-1}\right)+d\left(y_{2n}, y_{2n-1}\right)=\left\|x_{2n}-x_{2n-1}\right\|+\left\|y_{2n}-y_{2n-1}\right\|,$$

Ще отбележа, че при изследванията, проведени в тази глава, са обобщени няколко известни резултата на A. Gupta и др., W. Sintunavarat и др., A. Eldred и др., W. Kirk и др., M. Petric и др.

Важна част от изследванията в главата са и многобройните примери, осмислящи създадената теория. Намерени са приложения на методиката, разработена в главата, в няколко примери от линейните и нелинейните системи алгебрични уравнения, интегралните системи уравнения и др. Трудностите при съставянето на примерите е задължителната им адекватност към теоретичните достижения. Заедно с това е задължително и удовлетворяването на условията на твърденията, които се прилагат.

Нека операторът $T: A\cup B \to A\cup B$ ($A, B \subset X$, където X е метрично пространство с разстояние d) и T е цикличен оператор. Ще казваме, че T е цикличен свиващ оператор на Канан, ако

$$\begin{gathered}\left(\exists \alpha = const,\ 0\le \alpha < 1/2\right):\left(\forall\left(x,y\right)\in A\times B\right)\Rightarrow \\ d\left(Tx,Ty\right)\le \alpha d\left(Tx,x\right)+\alpha d\left(Ty,y\right)+\left(1-2\alpha\right)d\left(A,B\right).\end{gathered} \tag{в}$$

При някои ограничения на обхващащото метрично пространство X е установено:

- операторът T притежава единствена точка на най-добро приближение ξ от A;
- операторът T притежава единствена точка на най-добро приближение $T\xi$ от B;
- валидни са равенствата $\xi = T^{2n}\xi,\ \ n=1,2,....$;
- редицата $\{x_n\}$, където x_0 е произволна точка от A и $x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,1,...$, удовлетворява равенствата: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\xi;\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=T\xi$;
- за всяко $x\in A$ са намерени два типа оценки (“*a priori*” и “*a posteriori*”) на израза

$$d\left(T^{2n}x,\xi\right)=\left\|T^{2n}x-\xi\right\|=\left\|x_{2n}-\xi\right\|,\ n=1,2,....$$

Подобни резултати са получени и за цикличен свиващ оператор на Риш, който обобщава оператора от типа на Канан. Поради аналогията няма да дискутирам резултатите за оператора на Риш.

В трета глава се изследват обобщения на теоремата на Банах в модуларни пространства $L_\rho = \left(L,\rho\right)$, където L е линейно пространство, а функционалът ρ е съответен модулар в това пространство. Тук (в такива пространства), дефиниционното равенство за цикличен ρ-свиващ оператор на Канан (виж аналогията с (в)) придобива вида

$$\left(\exists \alpha = const,\ 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\right) : \left(\forall (x,y) \in A \times B\right) \Rightarrow$$
$$\rho(Tx - Ty) \le \alpha\rho(Tx - x) + \alpha\rho(Ty - y) + (1 - 2\alpha)\,dist(A,B).$$

Струва ми се, че в Дефиниция 3.1 на стр. 76 има неточност - в смисъл, че се приема (в дефиницията), че D е положителна константа. Според мен D е дистанцията между множествата A и B, провокирана от модулара ρ.

Основен резултат в третата глава е Теорема 3.1. Там са посочени достатъчни условия, свързани с качествата на:

- обхващащото пространство $L\rho$;
- модулара ρ;
- множествата $A, B \subset L\rho$;
- оператора $T : A \cup B \to A \cup B$,

при които:

- ако $d(A,B) = 0$ $(A \cap B \neq \varnothing)$, то съществува единствена неподвижна точка $x \in A \cap B$ $(Tx = x)$, която е $\rho-$граница на редицата $\{x_n\}_{n=0,1,...}$, където x_0 е произволна точка от $A \cup B$ и $x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0,1,...,$ т.е. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;
- ако $d(A,B) > 0$, то съществува единствена точка $x \in A$, такава че:
  - -- x е $\rho-$точка на най-добро приближение за оператора T в A;
  - -- Tx е $\rho-$точка на най-добро приближение за оператора T в B;
  - -- $T^2 x = x$;
  - -- x е $\rho-$граница на редицата $\{x_{2n}\}_{n=0,1,...}$;
  - -- Tx е $\rho-$граница на редицата $\{x_{2n+1}\}_{n=0,1,...}$.

В дисертацията (а също така и в автореферата), при формулировката на твърдение (ii) от Теорема 3.1 на стр. 82 е пропуснато да се съобщи, че $d(A,B) = d_\rho(A,B) > 0$. Подобни са пропуските в няколкото следствия от тази теорема. Тези следствия обогатяват и уточняват Теорема 3.1 при различни допълнителни предположения. Представени са два илюстриращи примера в пространствата R^2 и $L^2_{(-1,1)}$. Тук съществен е изборът на модуларите в тези пространства и на съответния свиващ оператор.

Накрая на тази точка от рецензията ще отделя внимание на още един важен резултат – Теорема 3.4, отнасяща се за двойка свиващи циклични оператори в модуларни пространства. Тук можем да видим аналогията с (а). Нека операторите $F : A \times A \to B,\ G : B \times B \to A$ (това още означава, че тези оператори са циклични). По-горе множествата $A, B \subset L$, където линейното пространство L е снабдено с подходящ модулар ρ. Тези оператори са $\rho-$свиващи, ако

$$(\exists \alpha,\beta = const,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0,\ \alpha+\beta<1):(\forall x,y\in A;\ \forall u,v\in B)\Rightarrow$$
$$\rho\big(F(x,y)-G(u,v)\big)\le \alpha\rho(x-u)+\beta\rho(y-v)+(1-\alpha-\beta)d_\rho(A,B).$$

В Дефиниция 3.7 на стр. 101 ми се струва, че изразите $\rho(x,u)$ и $\rho(y,v)$ трябва да се заменят съответно с $\rho(x-u)$ и $\rho(y-v)$. Същото се отнася и за предходната дефиниция с номер 3.5.

При лесно обосноваващи се естествени предположения в Теорема 3.4 се твърди, че:

- съществува единствена двойка точки $(x,y)\in A\times A$ на най-добро приближение за оператора F в $A\times A$, т.е. $\rho\big(F(x,y)-x\big)+\rho\big(F(y,x)-y\big)=2d_\rho(A,B)$;
- имаме $x=G\big(F(x,y),F(y,x)\big),\quad y=G\big(F(y,x),F(x,y)\big)$;
- двойката $\big(F(x,y),F(y,x)\big)\in B\times B$ е единствена точка на най-добро приближение за оператора G в множеството $B\times B$;
- $\big(\forall(x_0,y_0)\in A\times A\big)\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x-x_{2n})=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\rho(y-y_{2n})=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\rho\big(F(x,y)-x_{2n+1}\big)=0;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\rho\big(F(y,x)-y_{2n+1}\big)=0,$ където редиците $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ и $\{y_n\}_{n=0,1,\dots}$ се получават както преди (виж (б)).

В последния параграф на дисертацията са получени естествени достатъчни условия за съществуване на единствена наредена двойка неподвижни точки, както и единствена двойка точки на най-добро приближение за циклична $\rho-$свиваща двойка оператори от типа на Канан. Резултатите са придружени с примери.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Приносите в дисертационния труд можем да причислим към теоретичното обогатяване на функционалния анализ и в частност теорията на неподвижните точки на свиващи изображения в метрични и модуларни пространства. Разширени и обобщени са познанията, а от там и възможностите за приложения на един изключително ползотворен метод за решаване на уравнения и неравенства от различни класове. Теоретичните резултати са демонстрирани с необходимия брой примери. Изследванията са достатъчно дълбоки и важни, поради което те ще заемат трайно място в науката.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Дисертационният труд се основава на 5 научни публикации на докторанта. Всичките са публикувани съвместно с неговия научен ръководител и само с него. Две от публикациите са в списания с импакт фактор: *Applied Mathematics and Computation* (Elsevier, IF=2,300) и *Journal of Fixed Point Theory and Applications* (Springer International Publishing, IF=0,971). Трета от статиите е публикувана в списанието *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* което притежава SJR. Последните две публикации са в *Годишник на Шуменския университет “Епископ Константин Преславски“* и в Сборник научни трудове на конференция в България с международно участие.

Част от резултатите в дисертационния труд са използвани в два проекта с участието на докторанта, които са на университетско ниво. Резултатите са докладвани (в общо 4 доклада) през 2018 г. на конференция в Шуменски университет (*MATTEX*) и лятната конференция в Созопол (*International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics*).

Авторът е посочил 4 цитирания на своите публикации от чуждестранни автори. Считам, че е твърде рано да се очаква по-големия (достоен) брой позовавания на тези научни достижения поради малкото време, което ни дели от тяхното публикуване.

Както казах по-горе, всяка от публикациите, на които се базира дисертацията, е в съавторство с един учен. Нямам допълнителна информация, която да противоречи на моето мнение, че участието на докторанта в изследователската работа по тези публикации е еквивалентно на работата на неговия съавтор.

Накрая на тази точка, изрично ще подчертая, че публикационната активност на докторанта, свързана с дисертационния труд, е повече от задоволителна. Публикациите са достатъчно на брой и (което е по-важното) те са публикувани в реномирани научни списания, които щателно се отразяват от различни вторични бази данни и освен това се следят от научната общественост. Публикуваните резултати в качествени научни списания напълно подготвят непредубедения читател към създаване на собствено положително отношение към работата на докторанта.

9. Лично участие на докторанта

Без съмнение резултатите в дисертационния труд са постигнати и оформени с прякото участие на докторанта. Вероятно по-голямата част от задачите, разрешени в дисертацията, са поставени от доц. Б. Златанов, както и част от подходите за тяхното решаване. Това приемам за естествено. Заслугите на докторанта са в осмислянето и реализацията на поставените задачи.

10. Автореферат

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. В него са посочени:

- актуалност на дисертационния труд;
- основни цели и задачи на дисертационния труд;
- използваните изследвания на други автори и основните техни твърдения, подпомагащи изследванията на автора на дисертацията;
- основните дефиниции и нови понятия, използвани в дисертацията;
- основните твърдения, получени от докторанта;
- основни алгоритми;
- основните приложения на теоретичните резултати;
- основни изводи и заключения, произтичащи от дисертационния труд;
- авторски публикации по темата на дисертацията;

- апробация на получените резултати;
- декларация за оригиналност.

Ще отбележа, че изводите отразяват коректно постигнатото от дисертанта в предложения за рецензиране дисертационен труд.

Формално, авторефератът е изготвен съгласно изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. Материалът е изложен така, че читателят може да придобие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията. Според мен литературата в автореферата трябва напълно да повтаря библиографията от дисертационния труд. Това не е спазено в дискутирания автореферат.

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки и коментари. Неизбежните синтактични и правописни грешки, забелязани в текста на дисертацията, се преодоляват без усилие. Считам, че този тип бележки не трябва да бъдат предмет на дискусия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката. Представените документи и изследвания отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Освен това материалите и декларираните постижения на автора напълно съответстват на специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика, приети във връзка с Правилника на ПУ за приложение на ЗРАСРБ.

На основание на казаното по-горе убедено давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат и научни публикации. Предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен „доктор“ на Атанас Василев Илчев в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: Математически анализ.

28.12. 2018 г.

Рецензент: ....

(проф. дмн Ангел Дишлиев)