Р Е Ц Е Н З И Я

от доц. д-р Георги Тодоров Ганчев, асоцииран член на ИМИ при БАН,

на дисертационен труд за присъждане на научната степен **доктор на науките**
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
научна специалност: Геометрия и топология

Автор: Проф. д-р Манчо Христов Манев, ФМИ на ПУ "Паисий Хилендарски"

Тема на дисертационния труд: *Върху геометрията на многообразия с някои тензорни структури и метрики от норденов тип*

Със заповед № Р33–1291 от 05.04.2017 г. на Ректора на Пловдивския университет "Паисий Хилендарски"(ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема *Върху геометрията на многообразия с някои тензорни структури и метрики от норденов тип* за придобиване на научната степен *доктор на науките* в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; научна специалност: Геометрия и топология.

Автор на дисертационния труд е проф. д-р Манчо Христов Манев от катедра Алгебра и геометрия към ФМИ на ПУ "Паисий Хилендарски".

1. Общо представяне на получените материали

Представеният от проф. Манчо Манев комплект материали е в съответствие с Чл.45 (4) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ и включва следните документи:

1) молба до Ректора на ПУ за разкриване на процедура за защита на дисертационен труд;
2) автобиография в европейски формат;
3) протокол от предварителното обсъждане на дисертационния труд;
4) автореферат;
5) списък на научните публикации по темата на дисертацията;
6) дисертационен труд;
7) справка за спазване на специфичните изисквания на ФМИ;
8) декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
9) копия на научните публикации;
10) копие от диплома за образователната и научна степен "доктор";
11) други материали, които удостоверяват интересите в съответната научна област;
12) други документи, съобразно специфичните изисквания на ФС.

2. Кратки биографични данни за кандидата

Манчо Манев е роден на 19 август 1966 г. в гр. Чирпан. В периода 1984 -1989 г. завършва специалност *Математика и информатика* в Математическия факултет на

Пловдивския университет "Паисий Хилендарски". От 1990 до 1994 г. е редовен докторант в катедрата по Геометрия на ФМИ. През 1994 г. защитава успешно дисертационен труд на тема: *Върху диференциалната геометрия на почти контактни многообразия с B-метрика* и получава научната и образователна степен *доктор по математика* (научна специалност *Геометрия и топология*). От 1994 до 1996 г. е асистент, от 1996 до 1999 г. е старши асистент и от 1999 до 2003 г. е главен асистент в катедра Геометрия на ФМИ. От 2003 г. до 2013 г. Манчо Манев е доцент по *Геометрия и топология* в катедрата по Геометрия на ФМИ. От 01.11.2011 г. е ръководител на катедра Алгебра и геометрия при ФМИ. От 18.02.2013 г. е професор по *Геометрия и топология* в ПУ.

Ще отбележим 6-месечната следдокторска специализация през 2003 г. на дисертанта на тема: "Диференциална геометрия на почти хиперкомплексни многообразия с псевдориманови метрики" в унииверситета на Ниигата, Япония по линия на международната фондация "Мацумае".

3. Актуалност на тематиката

Основна задача в диференциалната геометрия на многообразията е изучаването на линейните свързаности върху тях. Темата за връзката между линейните свързаности и геометричните структури върху многообразието е водеща в дисертациония труд.

Напоследък са актуални многообразията с почти контактна 3-структура и многообразията с почти контактна метрична (риманова) 3-структура. Заслуга на автора е оригиналното изследване на многообразията с почти контактна структура и съвместима норденова метрика.

Важно направление в дисертационния труд е задълбоченото изучаване на почти контактните многообразия с B-метрика, при което са получени обобщаващи резултати, които се използват за създаване на нови направления в геометрията на многообразия с норденова метрика.

Авторът убедително доказва, че може да извършва задълбочени изследвания в съвременни актуални области, както и да създава нови направления в тези области.

4. Познаване на проблема

В момента дисертантът е водещ в разработването на паралел между многообразията със структури, в които римановата (псевдоримановата) метрика е ермитова и многообразията със структури, в които метриката е от норденов тип.

5. Методика на изследването

Публикациите и разработките в дисертационния труд определят автора като отлично запознат и владеещ съвременните методи на изследвания в диференциалната геометрия на многообразия с геометрични структури. Тъй като дисертантът е посветил много години на интензивни изследвания по споменатите теми и притежава голяма работоспособност, налице е една активна публикационна дейност.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд се състои от 228 страници и е структуриран по следния начин: въведение, изложение, заключение и библиография.

Въведението е в две части: описание на темата и цел на дисертацията. Изложението включва две глави, съдържащи общо 15 параграфа. В заключението се дава кратък обзор на основните приноси на дисертацията, списък на публикациите на автора върху резултатите от дисертацията, декларация за оригиналност и благодарности. Библиографията съдържа списък от 155 публикации, използвани в изложението.

Настоящият дисертационен труд е посветен на диференциалната геометрия на гладки многообразия с допълнителни тензорни структури и метрики от норденов тип. Разгледани са четири случая в зависимост от размерността на многообразието: $2n, 2n+1, 4n$ и $4n+3$. Тензорите при различните размерности, са следните: почти комплексна структура, почти контактна структура, почти хиперкомплексна структура и почти контактна 3-структура. Метриката в случая на $2n$-мерно многообразие е норденовата метрика. Метриките върху многообразията в другите три случая са породени от норденовата метрика и са съответно: В-метриката, ермитово-норденовата метрика и метриката от ермитово-норденов тип.

Глава I се състои от 8 параграфа.

В § 1 е намерена формула, по която фундаменталният тензор F на почти норденово многообразие $(M; J; g)$ се изразява чрез тензора на Нейехаус $[J; J]$ и неговия асоцииран тензор $\{J; J\}$. Това позволява класовете почти норденови многообразия относно фундаменталния тензор F да се характеризират чрез двойката тензори на Нейехаус. В Теорема 1.2. са намерени характеризационните равенства (1.33) на тези класове.

В § 2 е дадено задълбочено изследване на изображението: *вземане на присъединена метрика.* Квадратът на това изображение е $-Id$. В Теорема 2.14 са описани основните инварианти на това изображение. Тези резултати са приложени върху примера на 4-мерна група на Ли $\mathcal{L}$ със структура на W_1-многообразие. Тази конструкция позволява в Теорема 2.16 свойствата на двойките многообразия $(\mathcal{L}, J, g)$ и $(\mathcal{L}, J, \tilde{g})$ да се опишат чрез алгебрични връзки между константите на $\mathcal{L}$.

§ 3 е посветен на традиционната тема за естествените свързаности върху едно многообразие с тензорни структури. В Теорема 3.1. класовете на почти норденовите многообразия са характеризирани чрез изразяване на торзията на каноничната свързаност посредством двойката тензори на Нейехаус.

Нечетномерният аналог на почти норденовите многообразия са почти контактните многообразия с В-метрика.

На линейните свързаности върху едно почти контактно многообразие с В-метрика са посветени § 4 - § 6.

От § 4 ще отбележим Теорема 4.4, в която е получена формула за фундаменталния тензор F чрез двойката тензори на Нейехаус N и $\widehat{N}$. Тази теорема подготвя по-нататък изразяването на тензорите на торзия на естествените свързаности чрез тензорите на Нейехаус.

Нека $M(\varphi, \eta, \xi, g)$ е почти контактно многообразие с почти контактна структура (φ, η, ξ) и В-метрика g. Една линейна свързаност ∇^* върху M се нарича естествена, ако почти контактната структура и В-метриката са паралелни относно ∇^*.

В § 5 е отделено специално внимание на важните естествени свързаности: φB-свързаността, φ-каноничната свързаност и φKT-свързаността. Тези линейни свързаности са изучавани във връзка с общата контактно конформна група G и нейната важна подгрупа G_0. В Теорема 5.8. е доказано, че всеки основен клас $\mathcal{F}_i (i = 1, 2, ..., 11)$ на почти контактните В-метрични многообразия е затворен при действието на групата G_0. В Теорема 5.9 е доказано, че торзията на φ-каноничната свързаност е инвариантна относно обща контактно конформна трансформация тогава и само тогава, когато тази трансформация принадлежи на G_0.

В § 6 пространството на торзионните (0,3)-тензори на линейните свързаности върху почти контактно многообразие с В-метрика е разложено на 15 ортогонални и инвариантни подпространства относно действието на структурната група. Това разлагане се използва за класификация на линейните свързаности върху многообразието. В споменатите три параграфа основен резултат е Теорема 6.25: *Множеството на линейните свързаности* $\mathcal{C}$ *върху почти контактно В-метрично многообразие се разбива на* 15 *основни класа* $\mathcal{C}_i, (i = 1, 2, ..., 15)$ *чрез разлагането* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{C}_{15}$.

Трите важни естествени свързаности, споменати по-горе, са характеризирани относно тази класификация.

В § 7 се въвеждат и изучават двойка линейни свързаности на Схаутен-ван Кампе, генерирани от контактното разпределение и почти контактната В-метрична структура, асоциирани съответно с метриките g и $\tilde{g}$. С помощта на тази двойка несиметрични линейни свързаности са характеризирани основните класове почти контактни В-метрични многообразия.

Тази тема е нова за автора и се вписва интересно в другите разглеждания и резултати. Авторът намира потенциала и торзията на свързаността ∇^0 на Схаутен-ван Кампе, асоциирана с метриката $g(\nabla)$. С Теорема 7.1 се доказва, че линейната свързаност ∇^0 е единствената с намерената торзия, която запазва структурата (ξ, η, g). В Теорема 7.3 се намират класовете почти контактни В-метрични многообразия, за които ∇^0 е естествена. По подобна схема е изучена свързаността $\tilde{\nabla}^0$ на Схаутен-ван Кампе, асоциирана с метриката $\tilde{g}(\tilde{\nabla})$.

В Теорема 7.15 е изведена важна формула, която изразява тензора на кривината на свързаността $\nabla^0, (\tilde{\nabla}^0)$ чрез тензора на кривината на свързаността на Леви-Чивита на метриката $g(\tilde{g})$. Тези резултати дават възможност за нови изследвания в областта на кривините.

Тематиката на § 8 се различава от тази на предишните параграфи. Под влияние на статията [58] в този параграф се използва понятието *комплексно риманово многообразие*. Целта на параграфа е въвеждането на клас почти контактни комплексни риманови многообразия, следвайки известна аналогия със сасакиевите многообразия. Най-напред се въвежда комплексен риманов конус над едно почти контактно метрично многообразие и с Твърдение 8.1 се намират равенствата за фундаменталния тензор, при които този конус е холоморфно комплексно риманово пространство. Сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово пространство се въввежда с помощта на равенствата в Твърдение 8.1 и в Теорема 8.2. се намират характеизационни условия чрез фундаменталния тензор и двата тензора на Нейехаус. Теорема 8.4. може да има многобройни приложения, тъй като дава конструкция както на некомпактни, така и на компактни сасакиевоподобни почти контактни комплексни риманови многообразия. Пример 3 много добре илюстрира тази констатация.

Глава II се състои от 7 параграфа и е посветена на многообразия с почти хиперкомплексни структури и почти контактни 3-структури, снабдени с метрики от ермитово-норденов тип.

Основните многообразия, които се изследват в тази глава, се описват по следния начин: Почти хиперкомплексна структура H върху многообразие M^{4n} се състои от тройка антикомутиращи почти комплексни структури, такива че всяка от тях е композиция на другите две структури. Хиперкомплексната структура H е снабдена с метрична структура G, породена от псевдориманова метрика g с неутрална сигнатура. Метриката g е ермитова спрямо едната почти комплексна структура, а спрямо другите две почти комплексни структури е норденова. Така в метричната структура G се включват метриката g и три асоциирани (0,2)-тензори: една келерова форма и две метрики от типа на g. Авторът нарича тази почти хиперкомплексна структура почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики. Основният подход на изследване в глава II е пренасянето на диференциалната геометрия на многообразията от глава I върху споменатите многообразия с тройна структура.

В § 10 е посветен на хиперкомплексни структури с ермитово-норденови метрики върху 4-мерни алгебри на Ли. Изследванията в този параграф са мотивирани от [6], където са класифицирани инвариантните хиперкомплексни структури H върху 4-мерни реални групи на Ли, като метриката е положително дефинитна и ермитова относно тройката комплексни структури на H. Дефинирана е стандартна хиперкомплексна структура върху алгебрата и е въведена псевдоевклидова метрика с неутрална сигнатура. Основният резултат на автора тук е намирането на характеризационни условия за хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли да принадлежи на определен клас от класификацията в [6].

В § 11 върху допирателното разслоение TM на почти комплексно многообразие $(M; J)$ с афинна свързаност D се дефинират три почти комплексни структури J_1, J_2, J_3 (почти хиперкомплексна структура H). Така се получава $4n$-мерното почти хиперкомплексно многообразие $(TM; H)$. Получени са интересни твърдения за свойствата на $(TM; H)$ чрез свойствата на базата $(M; J)$. Напр. в Теорема 11.3. се доказва, че $(TM; H)$ е хиперкомплексно тогава и само тогава, когато M е плоско и J е паралелна. Ако $(M; J; g; \tilde{g})$ е почти комплексно многообразие с двойка асоциирани норденови метрики g и $\tilde{g}$, а $(TM; H)$ е неговото почти хиперкомплексно допирателно разслоение, авторът въвежда върху допирателното разслоение ермитово-норденова структура. В Теорема 11.6. се доказва важният факт, че полученото многообразие е почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики.

Тези разглеждания са приложени върху допирателното разслоение на h-сферата, която е пример на келерово-норденово многообразие с нулеви холоморфни секционни кривини и постоянни напълно реални секционни кривини. В Следствие 11.15. е доказано, че съответното почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики има аналогични свойства относно всяка от комплексните структури.

Като се използва дефиницията за тензор на Нейехаус за два ендоморфизма, в § 12 за едно почти хиперкомплексно многообразие се въвеждат шест асоциирани тензора на Нейехаус. В Теорема 12.7. се доказва интересното твърдение, че ако два от асоциираните тензори са равни на нула, то и останалите асоциирани тензори също са равни на нула.

Основен резултат е Теорема 12.11, в която се намират условията, при които едно почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики допуска афинна свързаност, която запазва структурата и чийто тензор на торзията е напълно антисиметричен. Тази афинна свързаност е единствена.

Теорема 12.11 е приложена към примера на почти хиперкомплексната структура с ермитово-норденови метрики, въведена върху 4-мерна група на Ли в [46]. Доказано е, че това многообразие допуска единствена афинна свързаност, която запазва структурата и има напълно антисиметрична торзия.

§ 13 е посветен на кватернионно келерови многообразия с ермитово-норденови метрики. Като има предвид дефиницията за кватернионно келерова структура върху почти хиперкомплексно многообразие, дисертантът въвежда понятието *кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики*. За тези многообразия се доказва Теорема 13.7, която гласи, че всяко кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики с размерност $4n \geq 8$ е айнщайново.

По-нататък се използва класификацията на почти хиперкомплексните многобразия с ермитово-норденови метрики. От условието едно почти хиперкомплексно многообразие да принадлежи на определен клас от тази класификация се получават редица твърдения за кватернионно келеровото многообразие с ермитово-норденови метрики да е хиперкелерово (Твърдения 13.12, 13.13, Следствие 13.15, Теорема 13.16).

Идеята за използването на метриките от ермитово-норденов тип е приложена и в § 14. Нека $M(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha), (\alpha = 1, 2, 3)$ $(\dim M = 4n+3)$ е многообразие с почти контактна 3-структура и псевдориманова метрика g. Ако една от почти контактните структури и метриката определят почти контактна B-метрична структура, с Теорема 14.1. се обоснова видът на другите две почти контактни структури. С това се мотивира въвеждането на многообразие с почти контактна 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип. По-точно върху многообразието има една почти контактна метрична структура и две почти контактни B-метрични структури. Важно свойство на многообразията с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип е, че могат да се разглеждат като реални хиперповърхнини на почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики. Това е една добра перспектива за получаване на съществени примери на разглежданите многообразия. Ще отбележим, че тази тематика е създадена от автора и е още в начален етап на развитие.

В § 15 е разгледано многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип. Въведени са асоциирани тензори на Нейехаус за тези структури. Разгледано е тяхното анулиране и е дадена негова геометрична интерпретация като необходимо и достатъчно условие за съществуване на афинни свързаности с напълно антисиметрични торзии, запазващи структурата.

Върху група на Ли с размерност 7 е конструиран пример на многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип и е доказано, че не съществува естествена свързаност с напълно антисиметрична торзия.

7. Приноси и значимост на разработката

Основните научни приноси на кандидата имат характер на: а) формулиране и решаване на проблеми; б) обосноваване, формулиране и разработване на нова тематика. Тези приноси могат да се обединят както следва:

- Въведен е асоцииран тензор на Нейехаус върху почти контактно многообразие с B-метрика. Класификацията на разглежданите многообразия е направена в термините на тензора на Нейехаус и неговия асоцииран тензор.

- Въведена и изучавана е φ-каноничната свързаност върху почти контактни многообразия с B-метрика и е намерена релацията между тази свързаност и другите две забележителни естествени свързаности върху тези многообразия: φB-свързаността и φKT-свързаността.

- Класифицирани са всички афинни свързаности върху едно почти контактно многообразие с B-метрика относно свойствата на техните торзии по отношение на структурата на многообразието. Характеризирани са трите изучавани естествени свързаности по отношение на тази класификация.

- Въведени и изучавани са сасакиевоподобни почти контактни комплексни риманови свързаности. Дадена е канонична конструкция на сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие, породено от холоморфно комплексно риманово многообразие.

- Във всеки труд по геометрия примерите са от съществено значение. Ще отбележим примерите на многообразия, снабдени с: почти комплексна структура с норденова метрика; почти контактна структура с B-метрика; почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденова метрика; почти контактни 3-структури с метрики от ермитово-норденов тип.

- Въведени и изучавани са кватернионни келерови многообразия, съответни на почти хиперкомплексни многообразия с ермитово-норденови метрики.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Представеният дисертационен труд отговаря на специфичните изисквания на ФМИ при ПУ за придобиване на научната степен **доктор на науките** по професионално направление 4.5. математика. Представени са 10 публикации, публикувани в следните научни списания:

Annals of Global Analysis and Geometry - 1;
Journal of Geometry and Physics - 1;
Central European Journal of Mathematics - 1;
Results in Mathematics - 2;
Filomat - 2;
Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci. - 1;
Journal of Geometry - 2.

От представените 10 публикации 8 статии са в 6 списания с IF (общ IF = 5,150) и 2 статии в 1 списание с общ MCQ = 0,42;

Самостоятелни са 7 статии; 2 статии са с по един съавтор и 1 - с двама съавтори.

Дадена е справка за 156 цитирания в 49 чужди публикации (забелязани след конкурса за "професор"), от които 31 цитирания в 14 статии с импакт фактор и 1 монография. Дисертантът е цитиран 14 пъти в 11 статии, публикувани в следните списания с IF:

Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences; Comptes Rendus Mathematique, Paris; Advances in Applied Clifford Algebras; Kodai Mathematical Journal; Mediterranean Journal of Mathematics; Filomat; Turkish Journal of Mathematics; Journal of Geometry and Physics, Results in Mathematics, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.

Манчо Манев е представил 16 цитирания в 3 статии, публикувани в Journal of Geometry и 1 цитиране в 1 монография, публикувана от издателство Nova Science Publishers, Inc., New York.

9. Лично участие на автора

От представените статии 7 са самостоятелни. Несъмнено приносите на дисертанта в съвместните научни публикации са най-малко равностойни на неговите съавтори.

10. Автореферат

Авторефератът е направен според изискванията и отразява точно и пълно основните резултати, получени в дисертационния труд.

Бележки върху автореферата:

На с. 8, т. 2.1 : *Размяна на ешовете ...* Тази конструкция не е добра нито от съдържателна, нито от формална гледна точка. Авторът носи отговорност при създаването на нови понятия.

С. 14: Използва се Теорема 4.3 вместо Теорема 4.4.

Наименованието *обща контактно конформна подгрупа* G_0 не е удачно, защото тази подгрупа не е единствена.

С. 22, ред 4 отгоре: написано е *гладно* многообразие.

С. 26, ред 7 отгоре: метриката $\breve{g}$ е записана неточно.

11. Лични впечатления

Проф. Манчо Манев се оформи като млад учен, ползващ се с авторитет сред геометрите у нас. Оформя се група от последователи на проф. Манев с ясно изразена област на изследване и с много добра перспектива за развитие и получаване на международно признание.

Заключение:

Дисертационният труд съдържа научни резултати, които представляват оригинален принос в математиката и отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ "Паисий Хилендарски". Представените научни статии и дисертационен труд напълно съответстват на специфичните изисквания на ФМИ, приети във връзка с Правилника на ПУ за приложение на ЗРАСРБ. Дисертационният труд показва, че дисертантът Манчо Христов Манев притежава задълбочени теоретични познания и професионални умения по научна специалност *Геометрия и топология* и е получил оригинални и значими научни приноси.

Поради гореизложеното, убедено давам своята положителна оценка за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат, постигнати резултати и приноси, и предлагам на почитаемото научно жури **да присъди** научната степен "**доктор на науките**"на **Манчо Христов Манев** в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; научна специалност: Геометрия и топология.

12.05.2017 г.,
София

Рецензент:..
(доц. д-р Георги Ганчев)