ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“

МАНЧО ХРИСТОВ МАНЕВ

ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЯТА НА МНОГООБРАЗИЯ С НЯКОИ ТЕНЗОРНИ СТРУКТУРИ И МЕТРИКИ ОТ НОРДЕНОВ ТИП

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на
научната степен „Доктор на науките“

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: *4.5. Математика*

Научна специалност: *Геометрия и топология*

Пловдив, 2017 г.

* * *

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Катедрения съвет в разширен състав на катедра „Алгебра и геометрия“ при ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“, проведен на 16.03.2017 г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на Научното жури, което ще се проведе на 15.06.2017 г. от 16:00 ч. в Заседателната зала на Новата сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“.

Научно жури:

- Чл.-кор. проф. д.м.н. Олег Кръстев Мушкаров (ИМИ на БАН),
- Чл.-кор. проф. д.м.н. Стефан Петров Иванов (ФМИ на СУ),
- Проф. д.м.н. Йохан Тодоров Давидов (ИМИ на БАН),
- Проф. д.м.н. Георги Христов Георгиев (ФМИ на ШУ),
- Доц. д-р Георги Тодоров Ганчев (ИМИ на БАН),
- Доц. д-р Симеон Петров Замковой (ФМИ на СУ),
- Доц. д-р Добринка Костадинова Грибачева (ФМИ на ПУ).

Заглавията и номерациите на главите и параграфите, номерациите на твърденията, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответните заглавия и номерации в дисертационния труд.

Структура на дисертацията

Настоящият дисертационен труд се състои от 228 страници и съдържа въведение, изложение, заключение и библиография. Въведението е в две части: обхват на темата и цел на дисертацията. Изложението включва две глави, съдържащи общо 15 параграфа. В заключението се дава кратък обзор на основните приноси на дисертацията, списък на публикациите на автора върху резултатите от дисертацията, декларация за оригиналност и благодарности. Библиографията съдържа списък от 155 публикации, използвани в текста.

Съдържание

Въведение

Обхват на темата

Една от най-изучаваните допълнителни тензорни структури върху гладко многообразие е *почти комплексната структура*, т.е. ендоморфизмът на допирателното разслоение, чийто квадрат във всяка точка е минус идентитетът. Многообразието трябва да бъде четномерно, $2n$. Обикновено то се снабдява с *ермитова метрика*, която е риманова или псевдориманова метрика, запазваща почти комплексната структура, т.е. почти комплексната структура действа като изометрия относно (псевдо)римановата метрика. Асоциираният (0,2)-тензор на ермитовата метрика е 2-форма и оттук следва взаимовръзката със симплектичната геометрия.

Уместен аналог е случаят, когато почти комплексната структура действа като антиизометрия относно псевдориманова метрика. Такава метрика е известна като антиермитова метрика или *норденова метрика* (за пръв път е изучавана от А. П. Норден [120, 121] и е наречена на неговото име). Норденовата метрика е по необходимост псевдориманова с неутрална сигнатура, докато ермитовата метрика може да бъде риманова или псевдориманова със сигнатура $(2n_1, 2n_2)$, $n_1 + n_2 = n$. Асоциираният (0,2)-тензор на всяка норденова метрика е също норденова метрика. И така, в този случай разполагаме с двойка взаимно асоциирани норденови метрики, известни също като норденови метрики близнаци. Това многообразие може да бъде разгледано като n-мерно многообразие с комплексна риманова метрика, чиито реална и имагинерна част са норденовите метрики близнаци. Такова многообразие е известно като *обобщено B-многообразие* [49, 108, 50, 45], *почти комплексно многообразие с норденова метрика* [35, 34, 14, 23, 123, 124, 131], *почти комплексно многообразие с B-метрика* [35, 36, 38], *почти комплексно многообразие с антиермитова метрика* [16, 17, 28] или *многообразие с комплексна риманова метрика* [65, 105, 37, 64].

Да предположим, че едно многообразие е от нечетна размерност $2n+1$. Тогава съществува контактна структура. Контактно разпределение с коразмерност 1 може да се разглежда като хоризонтално разпределение на подримановото многообразие. Това разпределение допуска почти комплексна структура, която е рестрикцията на контактен ендоморфизъм върху контактното разпределение. Вертикалното разпределение се определя чрез съответното векторно поле на Реб. Тогава нечетномерното многообразие е снабдено с *почти контактна структура*.

Ако разполагаме с ермитова метрика върху контактното разпределение, то почти контактното многообразие се нарича *почти контактно метрично многообразие*. В случая, когато е налична норденова метрика върху контактното разпределение, имаме *почти контактно многообразие с B-метрика*. Всяка B-метрика, като нечетномерен аналог на норденова метрика, е псевдориманова метрика със сигнатура $(n+1, n)$.

Едно естествено обобщение на почти комплексната структура е почти хиперкомплексната структура. Почти хиперкомплексното многообразие е многообразие с допирателно разслоение, снабдено с действие чрез алгебрата на кватернионите по такъв начин, че единичните кватерниони дефинират почти комплексни структури. Тогава *почти хиперкомплексна структура* върху $4n$-мерно многообразие е тройка антикомутиращи почти комплексни структури, чиято тройна композиция е минус идентитетът.

Знае се, че ако почти хиперкомплексното многообразие е снабдено с ермитова метрика, породената метрична структура е известната хиперермитова структура. Тя се състои от дадената ермитова метрика относно трите почти комплексни структури и три асоциирани келерови форми [2]. Почти хиперкомплексните структури (почти кватернионни структури според терминологията на Ш. Ересман) с ермитови метрики са изучени в много работи, напр. [29, 122, 13, 150, 134, 18, 3].

Обект на нашия интерес е метрична структура върху почти хиперкомплексно многообразие, породена от норденова метрика. Тогава съществуването на норденова метрика относно една от трите почти комплексни структури влече съществуване на още една норденова метрика и ермитова метрика относно другите две почти комплексни структури. Такава метрика наричаме *ермитово-норденова метрика* върху почти хиперкомплексното многообразие. Освен това, породената метрична структура съдържа дадената метрика и три (0,2)-тензора, асоциирани чрез почти хиперкомплексната структура – келерова форма и две ермитово-норденови метрики, за които ролите на почти комплексните структури се сменят циклично. В следствие на това породеното многообразие наричаме *почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики.* Многообразия от този тип са изучавани в няколко статии с участието на автора [47, 81, 103, 46, 82, 97].

Понятието *почти контактна 3-структура* е въведено от Й.-Й. Куо в [62]. Независимо от него К. Удрище нарича тази структура *почти кокватернионна структура* в [146]. По-късно тя е изучавана от няколко автори, напр. [62, 63, 137, 153]. Добре известно е, че произведението на едно многообразие с почти контактна 3-структура и реалната права допуска почти хиперкомплексна структура [62, 2].

Всички автори досега са разглеждали случая, когато съществува риманова метрика, съвместима с всяка от трите структури на дадената почти контактна 3-структура. Тогава обектът на изучаване е така наречената *почти контактна метрична 3-структура* (виж също [5, 21, 19, 20]).

Съвместимостта на една почти контактна 3-структура с B-метрика не е разглеждана преди публикациите, които са част от тази дисертация. В настоящия труд лансираме такава метрична структура върху многообразие с почти контактна 3-структура.

Цел на дисертацията

Обектът на изучаване в настоящата дисертация са някои теми от диференциалната геометрия на гладки многообразия с допълнителни тензорни структури и метрики от норденов тип. Разгледани са четири случая в зависимост от размерността на многообразието: $2n$, $2n+1$, $4n$ и $4n+3$. Изучаваните тензорни структури, които са съответни при различните взаимосвързани размерности, са: почти комплексната структура, почти контактната структура, почти хиперкомплексната структура и почти контактната 3-структура. Метриката върху $2n$-мерното многообразие е норденовата метрика. Метриките върху многообразията в другите три случая са породени от норденовата метрика и те са съответно: B-метриката, ермитово-норденовата метрика и метриката от ермитово-норденов тип. Четирите типа тензорни структури с метрики от норденов тип са разгледани в тяхната взаимовръзка.

Целта на дисертацията е да се извърши:

1. Разширяване и задълбочаване на изследванията на почти комплексните многообразия с норденова метрика и в частност изучаване на естествени свързаности с условия за тяхната торзия и инвариантни тензори при размяната в двойката норденови метрики.
2. Разширяване и задълбочаване на изследванията на почти контактните многообразия с B-метрика, включително изучаване на естествени свързаности с условия за тяхната торзия и асоциирани свързаности на Схаутен-ван Кампе, както и класификация на афинните свързаности.
3. Въвеждане и изучаване на сасакиевоподобни почти контактни комплексни риманови многообразия.
4. Разширяване и задълбочаване на изследванията на почти хиперкомплексни многообразия с ермитово-норденова метрика, включително: изучаване на интегруеми структури от разглеждания тип върху 4-мерни алгебри на Ли и допирателни разслоения с пълен лифт на базовата метрика; въвеждане и изучаване на асоциирани тензори на Нейехаус във връзка с естествени свързаности имащи напълно кососиметрична торзия, както и кватернионни келерови многообразия с ермитово-норденови метрики.
5. Въвеждане и изучаване на многообразия с почти контактни 3-структури и метрики от ермитово-норденов тип, в частност асоциирани тензори на Нейехаус и тяхната връзка с естествени свързаности имащи напълно кососиметрична торзия.

⁕ ⁕ ⁕

Глава I. Върху многообразия с почти комплексни структури и почти контактни структури, снабдени с метрики от норденов тип

§1. Почти комплексни многообразия с норденова метрика

В този параграф припомняме някои понятия и факти за почти комплексните многообразия с норденова метрика [49, 34, 36, 113].

Дадени са дефинициите на почти комплексно многообразие с норденова метрика $(\mathcal{M}, J, g)$ (накратко *почти норденово многообразие*) и на асоциираната норденова метрика $\widetilde{g}$, видът на структурната група за тези многообразия, дефиницията и свойствата относно почти комплексната структура J на фундаменталния тензор F и неговите асоциирани лиеви 1-форми.

Приведена е класификацията на Г. Ганчев и А. Борисов от [34] за почти норденовите многообразия, включваща основните класове $\mathcal{W}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ относно F и класа $\mathcal{W}_0$ на келерово-норденовите многообразия. След това се цитира понятието *изотропно келерово-норденово многообразие* съгласно [40] и [113]. Разгледан е тензорът Φ, дефиниран в [36] като разлика на свързаностите на Леви-Чивита $\widetilde{\mathrm{D}}$ и D за съответните норденови метрики. Посочени са свойствата на Φ и връзката му с F, както и класификацията относно Φ от [36]. Припомнена е дефиницията на тензора на Нейехаус за J и е дадена следната:

Дефиниция 1.1. Симетричният (1,2)-тензор $\{J, J\}$, определен чрез равенството $\{J, J\}(x, y) = \{Jx, Jy\} - \{x, y\} - J\{Jx, y\} - J\{x, Jy\}$, се нарича *асоцииран тензор на Нейехаус за J върху* $(\mathcal{M}, g)$, където симетричните скоби $\{x, y\}$ са определени по следния начин: $g(\{x, y\}, z) = g(\nabla_x y + \nabla_y x, z) = x\,(g(y, z)) + y\,(g(x, z)) - z\,(g(x, y)) - g([y, z], x) + g([z, x], y)$.

Характеризирани са класовете на разглежданите многообразия чрез тази двойка тензори. Получени са техни свойства относно структурата.

Теорема 1.1. Фундаменталният тензор F на почти норденово многообразие $(\mathcal{M}, J, g)$ се изразява чрез тензора на Нейехаус $[J, J]$ и неговия асоцииран тензор $\{J, J\}$ по формулата $F(x, y, z) = -\frac{1}{4}\{[J, J](Jx, y, z) + [J, J](Jx, z, y) + \{J, J\}(Jx, y, z) + \{J, J\}(Jx, z, y)\}$.

Намерени са зависимости между лиевите 1-форми и съответните 1-форми ϑ, $\widetilde{\vartheta}$ на $\{J, J\}$ и е получена следната

Теорема 1.2. Класовете на почти норденовите многообразия се характеризират чрез двойката тензори на Нейехаус $[J, J]$ и $\{J, J\}$ в равенства (1.33).

Накрая на параграфа са припомнени дефинициите на тензорите на кривина за D и $\widetilde{\mathrm{D}}$, както и съответните тензори на Ричи, скаларни кривини и тензори на Вайл.

§2. Инвариантни тензори при размяната на норденовите метрики върху почти комплексни многообразия

Обектът на изучаване в този параграф са почти комплексни многообразия с двойка норденови метрики, взаимно асоциирани чрез почти комплексната структура. По-точно, намерени са симетрична свързаност и тензори със съответна геометрична интерпретация, които са инвариантни при размяна на двойката норденови метрики и съответните им свързаности на Леви-Чивита. Разгледана е група на Ли, зависеща от 4 реални параметъра, като пример на 4-мерно

многообразие от изучавания тип и са намерени споменатите инвариантни обекти в явна форма.
Основните резултати в параграфа са публикувани в [89].

2.1. Размяна на ешовете, съответна на двойката норденови метрики и техните свързаности на Леви-Чивита

Дефиниция 2.1. Размяната на свързаностите на Леви-Чивита D и $\widetilde{\mathrm{D}}$, както и на техните съответни норденови метрики g и $\widetilde{g}$, наричаме *размяна на ешовете*.

2.1.1. Инвариантна класификация.

Лема 2.1. Потенциалът $\Phi(x,y)$ е антиинвариантен тензор при размяна на ешовете, т.е. $\widetilde{\Phi}(x,y)=-\Phi(x,y)$.

Лема 2.2. Асоциираните 1-форми f и f^* на Φ са инвариантни при размяна на ешовете, т.е. $\widetilde{f}(z)=f(z),\ \widetilde{f}^*(z)=f^*(z)$.

Лема 2.3. Лиевите форми θ и θ^* са инвариантни при размяна на ешовете, т.е. $\theta(z)=\widetilde{\theta}(z),\ \theta^*(z)=\widetilde{\theta}^*(z)$.

Теорема 2.4. Всички класове на почти норденовите многообразия от класификацията в [34] са инвариантни при размяна на ешовете.

2.1.2. Инвариантна свързаност. Дефинираме афинна свързаност $\mathrm{D}^\diamond$ чрез $\mathrm{D}^\diamond_x y=\mathrm{D}_x y+\frac{1}{2}\Phi(x,y)$, която всъщност е *средната свързаност* на D и $\widetilde{\mathrm{D}}$.

Твърдение 2.5. Средната свързаност $\mathrm{D}^\diamond$ на D и $\widetilde{\mathrm{D}}$ е инвариантна при размяна на ешовете.

Следствие 2.6. Ако инвариантната свързаност $\mathrm{D}^\diamond$ е нулева, тогава $(\mathcal{M},J,g)$ и $(\mathcal{M},J,\widetilde{g})$ са келерово-норденови многообразия и $\mathrm{D}=\widetilde{\mathrm{D}}$ също е нулева.

2.1.3. Инвариантни тензори.

Твърдение 2.7. Тензорът на Нейехаус е инвариантен, а асоциираният тензор на Нейехаус е антиинвариантен при размяна на ешовете, т.е. $[J,J](x,y) = \widetilde{[J,J]}(x,y)$, $\{J,J\}(x,y)=-\widetilde{\{J,J\}}(x,y)$.

Известна е следната релация между тензорите на кривина: $R^{\widetilde{\mathrm{D}}}(x,y)z = R^{\mathrm{D}}(x,y)z+P(x,y)z$, където $P(x,y)z=(\mathrm{D}_x\,\Phi)\,(y,z)-(\mathrm{D}_y\,\Phi)\,(x,z)+A(x,y)z$ и $A(x,y)z=\Phi(x,\Phi(y,z))-\Phi(y,\Phi(x,z))$.

Лема 2.8. Тензорът $A(x,y)z$ е инвариантен при размяна на ешовете.

Лема 2.9. Тензорът $P(x,y)z$ е антиинвариантен при размяна на ешовете.

Твърдение 2.10. Тензорът на кривина $R^{\mathrm{D}^\diamond}$ на средната свързаност $\mathrm{D}^\diamond$ за D и $\widetilde{\mathrm{D}}$ е инвариантен при размяна на ешовете.

Следствие 2.11. Инвариантният тензор $R^{\mathrm{D}^\diamond}$ се анулира тогава и само тогава, когато е в сила равенството $R^{\mathrm{D}}(x,y)z = -\frac{1}{2}P(x,y)z + \frac{1}{4}A(x,y)z$.

Твърдение 2.12. Тензорът B, определен като средно аритметично на R^{D} и $R^{\widetilde{\mathrm{D}}}$, е инвариантен при размяна на ешовете.

Следствие 2.13. Инвариантният тензор B се анулира тогава и само тогава, когато е в сила равенството $R^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{2}P$.

Получена е следната релация между инвариантни тензори: $R^{\mathrm{D}^\diamond} = B - \frac{1}{4}A$.

Теорема 2.14. Всяка линейна комбинация на инвариантните тензори B и $R^{\mathrm{D}^\diamond}$ е инвариантен тензор при размяна на ешовете.

2.1.4. Инвариантна свързаност и инвариантни тензори върху многообразията от главния клас. Разглеждаме произволно многообразие $(\mathcal{M}, J, g)$ от $\mathcal{W}_1$, наречен главен клас, защото само в него F и Φ се изразяват явно чрез g и $\widetilde{g}$. В този случай получаваме $\widetilde{F}(x,y,z) = F(Jx,y,z)$.

Инвариантната свързаност върху $\mathcal{W}_1$-многообразие има следния вид: $\mathrm{D}^\diamond_x y = \mathrm{D}_x y + \frac{1}{4n}\left\{g(x,y)f^\sharp + g(x,Jy)Jf^\sharp\right\}$, където $f(z) = g(f^\sharp, z)$.

Твърдение 2.15. Ако $(\mathcal{M}, J, g)$ е $\mathcal{W}_1$-многообразие, то P и A имат съответно вида: $P(x,y)z = \frac{1}{2n}\{g(y,z)p(x) + g(y,Jz)Jp(x) - g(x,z)p(y) - g(x,Jz)Jp(y)\}$, $A(x,y)z = \frac{1}{4n^2}\{g(y,z)a(x) + g(y,Jz)a(Jx) - g(x,z)a(y) - g(x,Jz)a(Jy)\}$, където $p(x) = \mathrm{D}_x f^\sharp + \frac{1}{2n}\{f(x)f^\sharp - f(f^\sharp)x - f(Jf^\sharp)Jx\}$ и $a(x) = f(x)f^\sharp + f(Jx)Jf^\sharp$.

2.2. Група на Ли като многообразие от главния клас и инвариантната свързаност и инвариантните тензори върху него

Тук разглеждаме пример на 4-мерна група на Ли $\mathcal{L}$ като $\mathcal{W}_1$-многообразие, даден в [142]. Нека съответната алгебра на Ли има база $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и е определена чрез следните ненулеви комутатори: $[x_1, x_4] = [x_2, x_3] = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$, $[x_1, x_3] = [x_4, x_2] = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 + \lambda_4 x_3 - \lambda_3 x_4$, където $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3,4)$.

Почти комплексната структура и норденовата метрика са въведени по следния начин: $Jx_1 = x_3$, $Jx_2 = x_4$, $Jx_3 = -x_1$, $Jx_4 = -x_2$, $g(x_1,x_1) = g(x_2,x_2) = -g(x_3,x_3) = -g(x_4,x_4) = 1$, $g(x_i,x_j) = 0$, $i \neq j$. Тогава $\widetilde{g}$ е определена чрез следните ненулеви компоненти: $\widetilde{g}(x_1,x_3) = \widetilde{g}(x_2,x_4) = -1$.

Теорема 2.16. Нека $(\mathcal{L}, J, g)$ и $(\mathcal{L}, J, \widetilde{g})$ са двойката $\mathcal{W}_1$-многообразия, определени както по-горе. Тогава и двете многообразия: (i) са от класа на локално конформно келерово-норденови многообразия тогава и само тогава, когато $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 = 0$; (ii) са локално конформно плоски чрез обикновени конформни трансформации и тензорите на кривина имат вида $R^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{2}g \owedge \rho^{\mathrm{D}} + \frac{1}{12}\tau^{\mathrm{D}} g \owedge g$ и $R^{\widetilde{\mathrm{D}}} = -\frac{1}{2}\widetilde{g} \owedge \rho^{\widetilde{\mathrm{D}}} + \frac{1}{12}\tau^{\widetilde{\mathrm{D}}}\widetilde{g} \owedge \widetilde{g}$;

(iii) са скаларно плоски и изотропни келерови тогава и само тогава, когато съответно $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 = 0$ и $\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 = 0$;

2.2.1. Инвариантната свързаност и инвариантните тензори при размяна на ешовете. В края на параграфа пресмятаме основните компоненти на инвариантните тензори B и тензора на кривина на инвариантната свързаност $\mathrm{D}^\diamond$, както и на антиинвариантните тензори Φ и $\{J, J\}$. Установяваме, че B (съответно $R^{\mathrm{D}^\diamond}$) се анулира, точно когато алгебрата на Ли е абелева и $(\mathcal{L}, J, g)$ е келерово-норденово многообразие.

§3. Свързаности от каноничен тип върху почти комплексни многообразия с норденова метрика

В този параграф даваме обзор с допълнения на резултати от диференциалната геометрия на свързаности от каноничен тип (т.е. метрични свързаности с торзия, удовлетворяващи някое алгебрично тъждество) върху разглежданите многообразия.
Основните резултати в параграфа са публикувани в [88].

3.1. Естествени свързаности върху почти норденово многообразие

В [38] е разгледано пространството $\mathcal{T}$ на всички торзионни (0,3)-тензори T (т.е. удовлетворяващи $T(x, y, z) = -T(y, x, z)$) върху едно почти норденово многообразие $(\mathcal{M}, J, g)$ и е дадено частично разлагане на $\mathcal{T}$ във вида $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3 \oplus \mathcal{T}_4$. Компонентите $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ са инвариантни ортогонални подпространства относно структурната група $\mathcal{G}$, определени чрез свойства на T относно J. Дадени са явно компонентите T_i на $T \in \mathcal{T}$ в $\mathcal{T}_i$.

Една афинна свързаност върху почти норденово многообразие се нарича *естествена свързаност*, ако J и g са паралелни относно тази свързаност.

Изразено чрез компонентите T_i, една афинна свързаност с торзия T върху $(\mathcal{M}, J, g)$ е естествена, точно когато $T_2(x, y, z) = \frac{1}{4}[J, J](x, y, z)$ и $T_3(x, y, z) = \frac{1}{8}(\{J, J\}(z, y, x) - \{J, J\}(z, x, y))$. Първото условие е дадено в [38], докато второто е получено тук.

3.2. B-свързаността и каноничната свързаност

В [36] е въведена *B-свързаността* D' само за многообразията от класа $\mathcal{W}_1$ чрез $\mathrm{D}'_x y = \mathrm{D}_x y - \frac{1}{2} J (\mathrm{D}_x J) y$. Очевидно, D' е естествена свързаност върху $(\mathcal{M}, J, g)$ и съществува във всеки клас на тези многообразия.

Изразяваме торзията T' на D' във вида $T'(x, y, z) = \frac{1}{8}([J, J](x, y, z) + \mathfrak{S}_{x,y,z}[J, J](x, y, z) + \{J, J\}(z, y, x) - \{J, J\}(z, x, y))$.

Една естествена свързаност D'' с торзия T'' върху $(\mathcal{M}, J, g)$ се нарича *канонична свързаност*, ако е в сила тъждеството $T''(x, y, z) + T''(y, z, x) - T''(Jx, y, Jz) - T''(y, Jz, Jx) = 0$, което е еквивалентно на $T''_1 = T''_4 = 0$.

Освен това D'' е единствена [38]. Изразяваме T'' чрез двойката тензори на Нейехаус във вида $T''(x,y,z) = \frac{1}{4}[J,J](x,y,z) + \frac{1}{8}(\{J,J\}(z,y,x) - \{J,J\}(z,x,y))$. Установяваме, че D'' съвпада с D' тогава и само тогава, когато $[J,J]$ се анулира, т.е. когато $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

Нека $(\mathcal{M},J,g)$ принадлежи на $\mathcal{W}_1$, който е класът на конформно еквивалентните многообразия на $\mathcal{W}_0$-многообразията относно общите конформни трансформации на g, дефинирана чрез $\overline{g} = e^{2u}\left\{\cos 2v\; g + \sin 2v\; \widetilde{g}\right\}$, където u и v са диференцируеми функции върху $\mathcal{M}$ [36]. Многообразието $(\mathcal{M},J,\overline{g})$ е също почти норденово. Важна подгрупа на общата група C на конформните трансформации е C_0, определени чрез условието $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v \circ J$. Доказано е, че торзията на D'' е инварианта на C_0, както и че тензорът на кривина за D'' е келеров тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_1^0$, т.е. когато $\mathcal{W}_1$-многообразието е със затворени лиеви форми θ и $\widetilde{\theta}$. Освен това са изучени конформните инварианти на каноничната свързаност в $\mathcal{W}_1^0$.

Имайки предвид конформната инвариантност на основните класове и торзията T'', условията за T'' се използват в [38] за други характеристики на класовете на почти норденовите многообразия. Поради вида на торзията T'' върху $\mathcal{W}_1$-многообразие, тя е известна като *векторна торзия*. Подкласът на $\mathcal{T}_3$ с векторни торзии е означен чрез $\mathcal{T}_3^1$, докато $\mathcal{T}_3^0$ е подкласът на $\mathcal{T}_3$ с нулева торзионна форма t''.

Теорема 3.1. Класовете на почти норденовите многообразия $(\mathcal{M},J,g)$ са характеризирани чрез изразяване на торзията T'' на каноничната свързаност чрез двойката тензори на Нейехаус $[J,J]$ и $\{J,J\}$ в равенства (3.11). Освен това, имайки предвид класификациите на $(\mathcal{M},J,g)$ относно F и T'' съответно в [34] и [38], получаваме: $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_1 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_3^1$; $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_3^0$; $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_3 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_2$; $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_3$; $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3^1$; $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3^0$; $(\mathcal{M},J,g) \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \Leftrightarrow T'' \in \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$.

3.3. KT-свързаността

В [110] е доказано, че естествена свързаност D''' с напълно кососиметрична торзия, наречена *KT-свързаност*, съществува върху почти норденово многообразие $(\mathcal{M},J,g)$ тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M},J,g)$ принадлежи на $\mathcal{W}_3$. Освен това тя е единствена и се определя чрез нейния потенциал $Q'''(x,y,z) = -\frac{1}{4}\mathfrak{S}_{x,y,z}F(x,y,Jz)$.

За $\mathcal{W}_3$-многообразие определяме торзиите на B-свързаността, каноничната свързаност и KT-свързаността чрез двойката тензори на Нейехаус съответно като $T' = \frac{1}{8}([J,J] + \mathfrak{S}[J,J])$, $T'' = \frac{1}{4}[J,J]$ и $T''' = \frac{1}{4}\mathfrak{S}[J,J]$. Тогава намираме релацията $T' = \frac{1}{2}\left(T'' + T'''\right)$. Следователно B-свързаността е *средната* свързаност за каноничната свързаност и КТ-свързаността върху квазикелерово многообразие с норденова метрика [111].

§4. Почти контактни многообразия с B-метрика

В този параграф припомняме някои понятия и факти за почти контактните многообразия с B-метрика, които са изучавани в [39, 78, 83, 95, 96, 99, 100, 116].

4.1. Почти контактни структури с B-метрика

Дадени са дефинициите на почти контактно многообразие с B-метрика $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, асоциираната B-метрика $\widetilde{g}$, хоризонталното (контактно) разпределение $\mathcal{H}$, вертикалното разпределение $\mathcal{V}$, почти контактното комплексно риманово многообразие, както и видът на структурната група $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

4.2. Фундаменталните тензори F и $\widetilde{F}$

Припомнени са дефиницията и свойствата относно почти контактната структура на фундаменталния тензор F и асоциираните му лиеви 1-форми.

Приведена е класификацията на Ганчев, Михова и Грибачев от [39] за тези многообразия, включваща основните класове $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \dots, 11)$ относно F и класа $\mathcal{F}_0$ на косимплектичните B-метрични многообразия. След това се припомня операторът $S : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ за g, дефиниран чрез $S(x) = -\nabla_x \xi$, където ∇ е свързаността на Леви-Чивита за g.

Разгледан е симетричният тензор Φ, дефиниран в [39] като разлика на свързаностите на Леви-Чивита $\widetilde{\nabla}$ и ∇ за съответните B-метрики $\widetilde{g}$ и g. Припомнени са свойствата на Φ и връзката му с F, както и класификацията относно Φ, дадена в [115]. Освен това е припомнена релацията на фундаменталния тензор $\widetilde{F}$ за $\widetilde{g}$ с тензора F.

4.3. Двойка тензори на Нейехаус

Припомнена е дефиницията на *нормална* почти контактна структура, както и анулирането на тензорът ѝ на Нейехаус като необходимо и достатъчно условие за това.

След привеждане на дефиницията на тензора на Нейехаус N за почти контактната структура (φ, ξ, η), по аналогия на кососиметричните скоби на Ли $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$, се разглеждат симетрични скоби $\{x, y\} = \nabla_x y + \nabla_y x$, определени чрез същата формула, както при почти норденовите многообразия. Така е въведен и симетричният тензор $\{\varphi, \varphi\}(x, y)$ в съответствие с кососиметричния тензор $[\varphi, \varphi](x, y)$. Допълнително е използвана връзката между производната на Ли за g по направление на ξ и ковариантната производна на η, а именно $(\mathfrak{L}_\xi g)(x, y) = (\nabla_x \eta)(y) + (\nabla_y \eta)(x)$, като алтернатива на $\mathrm{d}\eta(x, y) = (\nabla_x \eta)(y) - (\nabla_y \eta)(x)$. Тогава е дадена следната

Дефиниция 4.1. Симетричният (1,2)-тензор $\widehat{N}$, определен чрез равенството $\widehat{N} = \{\varphi, \varphi\} + \xi \otimes \mathfrak{L}_\xi g$, се нарича *асоцииран тензор на Нейехаус на почти контактната B-метрична структура* (φ, ξ, η, g).

Аналогично на изразяването на N чрез ковариантните производни на относно ∇ на φ и η е получено следното

Твърдение 4.1. Тензорът $\widehat{N}$ има следния вид, изразен чрез $\nabla\varphi$ и $\nabla\eta$: $\widehat{N}(x,y) = (\nabla_{\varphi x}\varphi)\,y - \varphi\,(\nabla_x\varphi)\,y + (\nabla_{\varphi y}\varphi)\,x - \varphi\,(\nabla_y\varphi)\,x + (\nabla_x\eta)\,(y)\xi + (\nabla_y\eta)\,(x)\xi$.

След това са получени релациите на N и $\widehat{N}$ с тензора F, откъдето следват свойствата на N и $\widehat{N}$ относно структурата (φ, ξ, η, g). Тензорите N и $\widehat{N}$ играят основна роля при естествените свързаности (т.е. свързаности, относно които структурните тензори на (φ, ξ, η, g) са паралелни) върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$. Торзиите и потенциалите на тези свързаности се изразяват чрез тази двойка тензори. По тази причина са характеризирани класовете на разглежданите многообразия чрез N и $\widehat{N}$. Намерен е видът на N и $\widehat{N}$ за всеки основен клас $\mathcal{F}_i$ на $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$. Както е известно, класът на нормалните почти контактни B-метрични многообразия е $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6$.

Твърдение 4.2. Класът на почти контактните B-метрични многообразия с нулев тензор $\widehat{N}$ е $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$.

Теорема 4.3. Нека $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е почти контактно B-метрично многообразие. Тогава фундаменталният тензор F се задава чрез двойката тензори на Нейехаус по формулата $F(x,y,z) = -\frac{1}{4}\{N(\varphi x, y, z) + N(\varphi x, z, y) + \widehat{N}(\varphi x, y, z) + \widehat{N}(\varphi x, z, y)\} + \frac{1}{2}\eta(x)\{N(\xi, y, \varphi z) + \widehat{N}(\xi, y, \varphi z) + \eta(z)\widehat{N}(\xi, \xi, \varphi y)\}$.

§5. Свързаности от каноничен тип върху почти контактни многообразия с B-метрика

В този параграф е конструирана свързаност от каноничен тип върху почти контактното многообразие с B-метрика. Доказано, че торзията ѝ е инвариантна относно подгрупа на общите конформни трансформации на изучаваната структура. Характеризирани са основните класове на разглежданите многообразия по отношение на торзията на свързаността от каноничен тип.

Основните резултати в параграфа са публикувани в [99].

5.1. Естествена свързаност върху почти контактно B-метрично многообразие

Дефиниция 5.1. Една афинна свързаност ∇^* се нарича *естествена свързаност* върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, ако почти контактната структура (φ, ξ, η) и B-метриката g са паралелни относно ∇^*, т.е. $\nabla^*\varphi = \nabla^*\xi = \nabla^*\eta = \nabla^* g = 0$.

Като следствие се получава, че $\widetilde{g}$ е също паралелна относно ∇^*.

Теорема 5.1. Една афинна свързаност ∇^* е естествена върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ тогава и само тогава, когато $\nabla^* \varphi = \nabla^* g = 0$.

5.2. φB-свързаност

В [96] е въведена естествена свързаност върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, а в [98] тя е наречена *φB-свързаност*. Тази свързаност е изучена за всички главни класове $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_{11}$ (т.е. тези класове, за чиито многообразия тензорът F се изразява явно) в [95, 96, 77, 78, 98] по отношение на свойствата на торзията и кривината им, както и тяхната конформна геометрия.

Рестрикцията на φB-свързаността ∇' върху $\mathcal{H}$ съвпада с B-свързаността D' върху съответното почти норденово многообразие, изучено за $\mathcal{W}_1$ в [36].

По-нататък използваме Теорема 4.3 и ортогоналното разлагане от §4, за да получим изразяване на торзията на φB-свързаността чрез двойката тензори на Нейехаус върху произволно $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и в частност върху многообразията от $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_7$.

Припомнен е видът на потенциала Q' на естествената свързаност ∇' относно свързаността на Леви-Чивита ∇, както и на торзията T', изразени чрез тензора F. Получени са релации между торзионните форми и лиевите форми.

5.3. φ-Канонична свързаност

Дефиниция 5.2. Една естествена свързаност ∇'' се нарича *φ-канонична свързаност* върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$, ако торзията ѝ T'' удовлетворява условието $T''(x,y,z) - T''(x,\varphi y,\varphi z) - T''(x,z,y) + T''(x,\varphi z,\varphi y) - \eta(x)\{T''(\xi,y,z) - T''(\xi,\varphi y,\varphi z) - T''(\xi,z,y) + T''(\xi,\varphi z,\varphi y)\} - \eta(y)\{T''(x,\xi,z) - T''(x,z,\xi) - \eta(x)T''(z,\xi,\xi)\} + \eta(z)\{T''(x,\xi,y) - T''(x,y,\xi) - \eta(x)T''(y,\xi,\xi)\} = 0$.

Рестрикцията на φ-каноничната свързаност ∇'' на $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ върху контактното разпределение $\mathcal{H}$ е единствената канонична свързаност D'' върху съответното почти комплексно многообразие с норденова метрика.

Конструирана е афинна свързаност ∇'' чрез нейния потенциал и е проверено, че тя е естествена върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$. Намерена е нейната торзия, изразена чрез торзията на ∇' и тензора на Нейехаус N. Установено е, че ∇'' е единствената φ-канонична свързаност върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$.

Твърдение 5.2. Необходимото и достатъчно условие φ-каноничната свързаност да съвпада с φB-свързаността е $N(\varphi\cdot, \varphi\cdot) = 0$.

Лема 5.3. Класът $\mathcal{U}_0 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$ на почти контактните B-метрични многообразия е определен чрез условието $N(\varphi\cdot, \varphi\cdot) = 0$.

Следствие 5.4. φ-Каноничната свързаност и φB-свързаността съвпадат върху едно почти контактно B-метрично многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е в класа $\mathcal{U}_0$.

Получен е видът на торзиите на ∇' и ∇'' върху многообразие от $\mathcal{U}_0$, изразени чрез N и $\widehat{N}$. Торзиите T' и T'' са различни една от друга върху многообразие, принадлежащо на единствените основни класове $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_7$, както и на техни директни суми с други класове. Получен е видът на T'' върху многообразията от $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_7$.

5.3.1. φ-Каноничната свързаност и общата контактно конформна група G.

Отбелязано е, че условието за нормалност $N = 0$ не се запазва под действието на G, но е в сила следното

Твърдение 5.5. Тензорът $N(\varphi\cdot, \varphi\cdot)$ е инварианта на G върху всяко почти контактно B-метрично многообразие.

Следствие 5.6. Класът $\mathcal{U}_0$ е затворен под действието на групата G.

Получена е релацията между свързаностите на Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ съответно за $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и контактно конформно еквивалентното му многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ при трансформация от G. Оттам е намерена формулата за преобразуването на F в $\overline{F}$ чрез трансформация от G.

Твърдение 5.7. Нека почти контактните B-метрични многообразия $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и $(\mathcal{M}, \varphi, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ са контактно конформно еквивалентни относно трансформация от G. Тогава съответните φ-канонични свързаности $\overline{\nabla}''$ и ∇'', както и торзиите им $\overline{T}''$ и T'' са свързани съответно чрез (5.21) и (5.22).

Получено е, че торзионните форми на φ-канонична свързаност се изразяват относно лиевите форми по същия начин, както за φB-свързаността.

5.3.2. φ-Каноничната свързаност и общата контактно конформна подгрупа G_0. Разгледана е подгрупата G_0 на G, дефинирана чрез условията $\mathrm{d}u \circ \varphi^2 + \mathrm{d}v \circ \varphi = \mathrm{d}u \circ \varphi - \mathrm{d}v \circ \varphi^2 = \mathrm{d}u(\xi) = \mathrm{d}v(\xi) = \mathrm{d}w \circ \varphi = 0$. Чрез директни пресмятания е доказана следната

Теорема 5.8. Всеки основен клас $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 11)$ на почти контактните B-метрични многообразия е затворен при действието на G_0. Освен това, G_0 е най-широката подгрупа на G, запазваща лиевите форми и класа $\mathcal{F}_0$.

Теорема 5.9. Торзията на φ-каноничната свързаност е инвариантна относно общите контактно конформни трансформации тогава и само тогава, когато тези трансформации принадлежат на G_0.

Имайки предвид инвариантността на $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 11)$ и T'' относно трансформациите на G_0, е получено **Твърдение 5.10**, където основните класове на почти контактните В-метрични многообразия се характеризират чрез условия за торзията на φ-каноничната свързаност.

5.3.3. Пример на почти контактно В-метрично многообразие със съвпадащи φВ-свързаност и φ-канонична свързаност. Припомнен е пример от [39], където векторното пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$ е разгледано като комплексно риманово многообразие с каноничната комплексна структура J и метриката g. Разгледана е времеподобната сфера $\mathcal{S}$: $g(U,U) = -1$ на g в $\mathbb{R}^{2n+2}$, където U е единичният нормален вектор към допирателното пространство $T_p\mathcal{S}$ в $p \in \mathcal{S}$. Положено е $g(U,JU) = \tan\psi$, $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогава почти контактната структура е въведена чрез $\xi = \sin\psi\ U + \cos\psi\ JU$, $\eta = g(\cdot,\xi)$, $\varphi = J - \eta \otimes J\xi$. Показано е, че $(\mathcal{S},\varphi,\xi,\eta,g)$ е почти контактно В-метрично многообразие от класа $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$.

Тъй като, съгласно Следствие 5.4, φ-каноничната свързаност съвпада с φВ-свързаността върху всяко многообразие в $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$, то торзията и торзионните форми на тази свързаност са: $T''(x,y,z) = \cos\psi\{\eta(x)g(y,\varphi z) - \eta(y)g(x,\varphi z)\} - \sin\psi\{\eta(x)g(\varphi y,\varphi z) - \eta(y)g(\varphi x,\varphi z)\}$, $t'' = 2n\sin\psi\ \eta$, $t''^{*} = -2n\cos\psi\ \eta$, $\hat{t}'' = 0$, което е в съответствие с Твърдение 5.10.

5.4. φKT-свързаност

В [83], върху почти контактно В-метрично многообразие $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е въведена естествена свързаност ∇''', наречена *φKT-свързаност*, чиято торзия T''' е напълно кососиметрична, т.е. 3-форма. Там е доказано, че φKT-свързаността съществува само върху многообразие от $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$, т.е. $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ има килингово ξ и нулева циклична сума $\mathfrak{S}$ на F. φKT-свързаността е нечетномерен аналог на KT-свързаността D''', обсъдена в §3.3, върху съответния клас на квазикелеровите многообразия с норденова метрика.

Следствие 5.11. φKT-свързаността съществува върху почти контактно В-метрично многообразие тогава и само тогава, когато $\widehat{N}$ е нулев върху това многообразие.

Съгласно [83] единствената φKT-свързаност се определя чрез $g(\nabla'''_x y,z) = g(\nabla_x y,z) + \frac{1}{2}T'''(x,y,z)$, $T''' = \frac{1}{2}\left(\eta \wedge \mathrm{d}\eta\right) + \frac{1}{4}\mathfrak{S}N$. Очевидно, торзионните форми на φKT-свързаността са нулеви.

Установено е, че φВ-свързаността ∇' и φ-каноничната свързаност ∇'' съвпадат, точно когато φKT-свързаността ∇''' не съществува. За случая, когато ∇''' съществува, е получено следното

Твърдение 5.12. Нека $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е многообразие от $\mathcal{F}_i$, $i \in \{3,7\}$. Тогава φВ-свързаността ∇' е средната свързаност на φ-каноничната свързаност ∇'' и φKT-свързаността ∇''', т.е. $\nabla' = \frac{1}{2}\left\{\nabla'' + \nabla'''\right\}$.

§6. Класификация на афинните свързаности върху почти контактни многообразия с B-метрика

В този параграф пространството на торзионните (0,3)-тензори на афинните свързаности върху почти контактни многообразия с B-метрика е разложено на 15 ортогонални и инвариантни подпространства относно действието на структурната група. Това разлагане поражда класификация на съответните афинни свързаности. Три известни свързаности, запазващи структурата, са характеризирани относно тази класификация.

Основните резултати в параграфа са публикувани в [100].

Изследванията на афинните свързаности върху многообразия заемат централно място в изучаването на диференциалната геометрия на тези многообразия. Афинните свързаности, запазващи метриката, се характеризират напълно чрез техните торзионни тензори. В съответствие с нашите цели, важно е да се опишат афинните свързаности относно свойствата на техните торзионни тензори относно структурите на многообразието. Такава класификация на пространството на торзионните тензори е направена в [38] за случая на почти комплексни многообразия с норденова метрика. Тези многообразия са четномерния аналог на нечетномерните почти контактни многообразия.

6.1. Разлагане на пространството на торзионните тензори

Обектът на разглежданията ни са афинните свързаности ∇^* с торзия T, т.е. $T(x,y) = \nabla^*_x y - \nabla^*_y x - [x,y]$. Следователно трябва да се изучат свойствата на торзионните тензори $T(x,y,z) = g(T(x,y),z)$ относно почти контактната структура и B-метриката.

Разглеждаме T_pM в произволна точка $p \in \mathcal{M}$ като $(2n+1)$-мерно векторно пространство с почти контактна B-метрична структура (V,φ,ξ,η,g). Нека $\mathcal{T} = \{T(x,y,z) \in \mathbb{R},\ x,y,z \in V \mid T(x,y,z) = -T(y,x,z)\}$ е векторното пространство на всички торзионни тензори над V. Метриката g индуцира скаларно произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ върху $\mathcal{T}$, дефинирано чрез $\langle T_1,T_2\rangle = g^{iq}g^{jr}g^{ks}$ $T_1(e_i,e_j,e_k)T_2(e_q,e_r,e_s)$, $T_{1,2} \in \mathcal{T}$ и базата $\{e_i\}$ $(i = 1,2,\dots,2n+1)$ на V.

Структурната група $\mathcal{G}\times\mathcal{I}$, състояща се от матрици от вида, даден в §4.1, има стандартно представяне във V, което индуцира естествено представяне λ на $\mathcal{G}\times\mathcal{I}$ в $\mathcal{T}$ както следва: $((\lambda a)T)(x,y,z) = T\left(a^{-1}x,a^{-1}y,a^{-1}z\right)$ за произволно $a \in \mathcal{G}\times\mathcal{I}$ и $T \in \mathcal{T}$, така че $\langle(\lambda a)T_1,(\lambda a)T_2\rangle = \langle T_1,T_2\rangle$, $T_1,T_2 \in \mathcal{T}$.

Използвайки проекторите h и v върху V, въведени в §4.1, имаме ортогонално разлагане на V във вида $V = \mathrm{h}(V) \oplus \mathrm{v}(V)$. Тогава получаваме частично разлагане на $\mathcal{T}$ както следва.

Първо, чрез $p_1(T)(x,y,z) = -T(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \varphi^2 z)$ е дефиниран операторът p_1 върху $\mathcal{T}$, за който е в сила следната

Лема 6.1. Операторът p_1 има следните свойства: (i) $p_1 \circ p_1 = p_1$; (ii) $\langle p_1(T_1), T_2\rangle = \langle T_1, p_1(T_2)\rangle$, $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$; (iii) $p_1 \circ (\lambda a) = (\lambda a) \circ p_1$.

Така е получено ортогоналното разлагане на $\mathcal{T}$ чрез образа и ядрото на p_1, а именно $\mathcal{P}_1 = \mathrm{im}(p_1) = \{T \in \mathcal{T} \mid p_1(T) = T\}$ и $\mathcal{P}_1^{\perp} = \ker(p_1) = \{T \in \mathcal{T} \mid p_1(T) = 0\}$.

След това чрез $p_2(T)(x,y,z) = \eta(z)T(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \xi)$ е дефиниран оператор p_2 върху $\mathcal{P}_1^{\perp}$, за който се доказва **Лема 6.2**, аналогична на предходната. Тогава имаме $\mathcal{P}_2 = \mathrm{im}(p_2)$ и $\mathcal{P}_2^{\perp} = \ker(p_2)$.

После е дефиниран оператор p_3 върху $\mathcal{P}_2^{\perp}$ чрез равенството $p_3(T)(x,y,z) = \eta(x)T(\xi, \varphi^2 y, \varphi^2 z) + \eta(y)T(\varphi^2 x, \xi, \varphi^2 z)$ и за p_3 са доказани в **Лема 6.3** свойства като на p_1 и p_2. Така са в сила $\mathcal{P}_3 = \mathrm{im}(p_3)$ и $\mathcal{P}_4 = \ker(p_3)$.

Теорема 6.4. Разлагането $\mathcal{T} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 \oplus \mathcal{P}_4$ е ортогонално и инвариантно под действието на $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$. Подпространствата $\mathcal{P}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ са определени чрез $\mathcal{P}_1 : T(x,y,z) = -T(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \varphi^2 z)$, $\mathcal{P}_2 : T(x,y,z) = \eta(z)T(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \xi)$, $\mathcal{P}_3 : T(x,y,z) = \eta(x)T(\xi, \varphi^2 y, \varphi^2 z) + \eta(y)T(\varphi^2 x, \xi, \varphi^2 z)$, $\mathcal{P}_4 : T(x,y,z) = -\eta(z)\left\{\eta(y)T(\varphi^2 x, \xi, \xi) + \eta(x)T(\xi, \varphi^2 y, \xi)\right\}$, $x,y,z \in V$.

В **Следствие 6.5** и **Следствие 6.6** са характеризирани $\mathcal{P}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ чрез свойствата на T и неговите 1-форми относно проекторите h и v.

По-нататък продължаваме разлагането на $\mathcal{P}_i$ $(i = 1,2,3,4)$.

6.1.1. Подпространството $\mathcal{P}_1$. Тъй като ендоморфизмът φ индуцира почти комплексна структура върху $\mathcal{H}$ и рестрикцията на g върху $\mathcal{H}$ е норденова метрика, то разлагането на $\mathcal{P}_1$ е направено като разлагането на пространството на торзионните тензори върху почти комплексно многообразие с норденова метрика, известно от [38].

Дефиниран е чрез $L_{1,0}(T)(x,y,z) = -T(\varphi x, \varphi y, \varphi^2 z)$ линейният оператор $L_{1,0}$ върху $\mathcal{P}_1$ и е получена следната

Лема 6.7. Операторът $L_{1,0}$ е инволютивна изометрия върху $\mathcal{P}_1$ и е инвариантен относно $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$, т.е. (i) $L_{1,0} \circ L_{1,0} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_1}$; (ii) $\langle L_{1,0}(T_1), L_{1,0}(T_2)\rangle = \langle T_1, T_2\rangle$; (iii) $L_{1,0}((\lambda a)T) = (\lambda a)(L_{1,0}(T))$, $T_1, T_2 \in \mathcal{P}_1$, $a \in \mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

Следователно $L_{1,0}$ има собствени стойности $+1$ и -1, а собствените им пространства $\mathcal{P}_1^+ = \{T \in \mathcal{P}_1 \mid L_{1,0}(T) = T\}$ и $\mathcal{P}_1^- = \{T \in \mathcal{P}_1 \mid L_{1,0}(T) = -T\}$ са инвариантни ортогонални подпространства на $\mathcal{P}_1$.

За да разложим $\mathcal{P}_1^-$, е използван линейният оператор $L_{1,1}$ върху $\mathcal{P}_1^-$, дефиниран чрез $L_{1,1}(T)(x,y,z) = -T(\varphi x, \varphi^2 y, \varphi z)$ със собствените пространства $\mathcal{P}_{1,1}$ и $\mathcal{P}_{1,2}$, съответни на -1 и $+1$. Така е получена **Лема 6.8** със същото твърдение за $L_{1,1}$, както предходната лема. Следователно $\mathcal{P}_{1,1}$ и $\mathcal{P}_{1,2}$ са също инвариантни и ортогонални.

За да разложим $\mathcal{P}_1^+$, е дефиниран линеен оператор $L_{1,2}$ върху $\mathcal{P}_1^+$ чрез $L_{1,2}(T)(x,y,z) = -\frac{1}{2}\{T(\varphi^2 z, \varphi^2 x, \varphi^2 y) + T(\varphi^2 z, \varphi x, \varphi y) - T(\varphi^2 z, \varphi^2 y, \varphi^2 x) -T(\varphi^2 z, \varphi y, \varphi x)\}$. Получена е **Лема 6.9** за $L_{1,2}$ със същото твърдение като предишните две, както и за инвариантността и ортогоналността на собствените пространства $\mathcal{P}_{1,3}$ и $\mathcal{P}_{1,4}$, съответни на $+1$ и -1. Тогава имаме

Теорема 6.10. Разлагането $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{1,1} \oplus \mathcal{P}_{1,2} \oplus \mathcal{P}_{1,3} \oplus \mathcal{P}_{1,4}$ е ортогонално и инвариантно относно структурната група.

В **Твърдение 6.11** и **Твърдение 6.12** е дадено определяне на $\mathcal{P}_{1,i}$ $(i = 1,2,3,4)$ чрез свойствата на T и 1-формите му t, t^* относно структурата. Подпространствата $\mathcal{P}_{1,1}$ и $\mathcal{P}_{1,3}$ са допълнително разложени на две: с нулеви и с ненулеви 1-форми, т.е. $\mathcal{P}_{1,1} = \mathcal{P}_{1,1,1} \oplus \mathcal{P}_{1,1,2}$, $\mathcal{P}_{1,3} = \mathcal{P}_{1,3,1} \oplus \mathcal{P}_{1,3,2}$, където $\mathcal{P}_{1,1,1} : t \neq 0$, $\mathcal{P}_{1,3,1} : t \neq 0$, $\mathcal{P}_{1,1,2} : t = 0$, $\mathcal{P}_{1,3,2} : t = 0$.

След това в **Твърдение 6.13** за $T \in \mathcal{T}$ и проекторите $p_{1,i}$ $(i = 1,2,3,4)$ на $\mathcal{T}$ в $\mathcal{P}_{1,i}$, породени от разлагането по-горе, са дадени в явен вид проекциите $p_{1,i}(T)$.

6.1.2. Подпространството $\mathcal{P}_2$. Продължаваме аналогично на показаната процедура за $\mathcal{P}_1$.

Лема 6.14. Операторът $L_{2,0}$: $L_{2,0}(T)(x,y,z) = \eta(z)T(\varphi x, \varphi y, \xi)$ е инволютивна изометрия върху $\mathcal{P}_2$ и инвариантен относно $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

Оттук следва, че собствените пространства $\mathcal{P}_{2,1}$ и $\mathcal{P}_{2,2}$, съответни на собствените стойности -1 и $+1$, са инвариантни и ортогонални. Така е получена **Теорема 6.15**, според която разлагането $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,2}$ е ортогонално и инвариантно относно $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

Следват **Твърдение 6.16**, в което са определени $\mathcal{P}_{2,1}$ и $\mathcal{P}_{2,2}$ чрез свойствата на T, **Твърдение 6.17**, където са дадени в явен вид проекциите $p_{2,1}(T)$ и $p_{2,2}(T)$ при съответните проектори на $T \in \mathcal{T}$ в $\mathcal{P}_{2,1}$ и $\mathcal{P}_{2,2}$, както и **Следствие 6.18**, според което t, t^* и $\hat{t}$ са нулеви във $\mathcal{P}_{2,1}$ и $\mathcal{P}_{2,2}$.

6.1.3. Подпространството $\mathcal{P}_3$. В **Лема 6.19** е доказано, че операторите $L_{3,k}$ $(k = 0,1)$, дефинирани чрез $L_{3,0}(T)(x,y,z) = \eta(x)T(\xi, \varphi y, \varphi z) - \eta(y)T(\xi, \varphi x, \varphi z)$, $L_{3,1}(T)(x,y,z) = \eta(x)T(\xi, \varphi^2 z, \varphi^2 y) - \eta(y)T(\xi, \varphi^2 z, \varphi^2 x)$, са инволютивни изометрии върху $\mathcal{P}_3$ и инвариантни относно $\mathcal{G}\times\mathcal{I}$. Чрез последователното действие на тези оператори са намерени съответните на стойностите $+1$ и -1 собствени пространства $\mathcal{P}_3^+$, $\mathcal{P}_3^-$ чрез $L_{3,0}$ и от тях $\mathcal{P}_{3,i}$ $(i = 1,2,3,4)$ чрез $L_{3,1}$. В **Теорема 6.20** е установено, че разлагането $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_{3,1} \oplus \mathcal{P}_{3,2} \oplus \mathcal{P}_{3,3} \oplus \mathcal{P}_{3,4}$ е ортогонално и инвариантно относно $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

Следват **Твърдение 6.21**, в което са определени $\mathcal{P}_{3,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ чрез свойствата на T относно структурата и **Следствие 6.22**, според което $t = t^* = 0$ във $\mathcal{P}_{3,k}$ $(k = 2, 3, 4)$. Подпространството $\mathcal{P}_{3,1}$ се разлага допълнително на $\mathcal{P}_{3,1,1}$, $\mathcal{P}_{3,1,2}$ и $\mathcal{P}_{3,1,3}$, определени съответно чрез $t = 0$, $t^* = 0$ и $t = t^* = 0$. В **Твърдение 6.23** са дадени в явен вид проекциите $p_{3,k}(T)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ при съответните проектори от $\mathcal{T}$ в $\mathcal{P}_{3,k}$.

6.1.4. Подпространството $\mathcal{P}_4$. Накрая определяме $\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_{4,1}$ чрез $T(x, y, z) = \eta(z)\left\{\eta(y)\hat{t}(x) - \eta(x)\hat{t}(y)\right\}$. Очевидно проекцията $p_{4,1}(T)$ на $\mathcal{T}$ върху $\mathcal{P}_{4,1}$ съвпада с дясната страна на последното равенство.

6.1.5. Петнадесетте подпространства на $\mathcal{T}$. В заключение на разлагането са комбинирани Теореми 6.4, 6.10, 6.15, 6.20 и означени $\mathcal{P}_{i,j}$ и $\mathcal{P}_{i,j,k}$ като $\mathcal{T}_s, s \in \{1, 2, \dots, 15\}$. Така е получена следната основна за параграфа

Теорема 6.24. Нека $\mathcal{T}$ е векторното пространство на торзионните тензори от тип $(0, 3)$ над векторното пространство V с почти контактна B-метрична структура (φ, ξ, η, g). Разлагането $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{T}_{15}$ е ортогонално и инвариантно относно структурната група $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

6.2. Петнадесетте класа афинни свързаности

За $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ съществуват безброй много афинни свързаности върху $T_p\mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$. Тогава подпространствата $\mathcal{T}_s$ $(s \in \{1, 2, \dots, 15\})$, на които T принадлежи, са важна характеристика на свързаността.

Дефиниция 6.1. Казва се, че афинна свързаност ∇^* върху почти контактно B-метрично многообразие принадлежи на класа $\mathcal{C}_s$, $s \in \{1, 2, \dots, 15\}$, ако торзионният тензор T^* на ∇^* принадлежи на подпространството $\mathcal{T}_s$ в разлагането на $\mathcal{T}$.

Имайки предвид Теорема 6.24, получаваме следната класификационна

Теорема 6.25. Множеството на афинните свързаности $\mathcal{C}$ върху почти контактно B-метрично многообразие се разделя на 15 основни класа $\mathcal{C}_s$, $s \in \{1, 2, \dots, 15\}$ чрез разлагането $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{C}_{15}$.

Специалният клас $\mathcal{C}_0$ съдържа симетричните свързаности и съответства на нулевото векторно подпространство $\mathcal{T}_0$: $T = 0$ на $\mathcal{T}$. Този клас се включва във всеки друг $\mathcal{C}_s$. Класовете $\mathcal{C}_i \oplus \mathcal{C}_j \oplus \dots$, директни суми на основните класове, са определени чрез съответните подпространства $\mathcal{T}_i \oplus \mathcal{T}_j \oplus \dots$.

6.3. Някои естествени свързаности във въведената класификация

По-нататък в параграфа са обсъдени трите разглеждани в §5 естествени свързаности върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$.

Твърдение 6.26. Нека ∇^* е естествена свързаност с торзия T върху почти контактно B-метрично многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$. Тогава са в сила импликациите: $T \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_6 \oplus \mathcal{T}_{12} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_0$, $T \in \mathcal{T}_3 \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_3$,

$T \in \mathcal{T}_4 \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_1$, $T \in \mathcal{T}_5 \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_2$, $T \in \mathcal{T}_7 \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_7$, $T \in \mathcal{T}_8 \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$, $T \in \mathcal{T}_9 \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_5$, $T \in \mathcal{T}_{10} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_4$, $T \in \mathcal{T}_{11} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_6$, $T \in \mathcal{T}_{13} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_9$, $T \in \mathcal{T}_{14} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_{10}$, $T \in \mathcal{T}_{15} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{F}_{11}$.

Следствие 6.27. Едно почти контактно B-метрично многообразие е нормално, ако произволна естествена свързаност върху него принадлежи на класа $\mathcal{C}_4 \oplus \mathcal{C}_5 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11}$.

Следствие 6.28. Едно почти контактно B-метрично многообразие има нулев $\widehat{N}$, ако произволна естествена свързаност върху него принадлежи на класа $\mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_7$.

6.3.1. φB-свързаността в класификацията. φB-свързаността ∇' е обсъдена в §5 и има торзия T'. Пресметнати са компонентите на T' чрез F за всяко $\mathcal{P}_{i,j}$. Получено е, че $T' \in \mathcal{T}_3 \oplus \mathcal{T}_4 \oplus \dots \oplus \mathcal{T}_{15}$ и е установена следната

Твърдение 6.29. φB-свързаността върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на класа $\mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_4 \oplus \dots \oplus \mathcal{C}_{15}$.

6.3.2. φ-Каноничната свързаност в класификацията.

Твърдение 6.30. Съответствието между класовете $\mathcal{F}_i$ $(i \in \{1, 2, \dots, 11\})$ на многообразията $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и класовете $\mathcal{C}_s$ $(s \in \{1, 2, \dots, 15\})$ на φ-каноничната свързаност ∇'' върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е следното: $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_0 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_6 \oplus \mathcal{C}_{12}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_4$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_5$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_3 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_3$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_4 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_{10}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_5 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_9$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_6 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_{11}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_7 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_{12}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_8 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_8 \oplus \mathcal{C}_{14}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_9 \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_{13}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_{10} \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_{14}$; $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_{11} \Leftrightarrow \nabla'' \in \mathcal{C}_{15}$.

6.3.3. φKT-свързаността в класификацията. Пресметнати са компонентите на торзията T''' на φKT-свързаността ∇''', откъдето следва, че е в сила $T''' \in \mathcal{T}_3 \oplus \mathcal{T}_6 \oplus \mathcal{T}_7 \oplus \mathcal{T}_{12}$ и следното

Твърдение 6.31. φKT-свързаността ∇''' върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$ принадлежи на $\mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_6 \oplus \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_{12}$. Освен това, ако $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_3$ (съотв. $\mathcal{F}_7$), то $\nabla''' \in \mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_6$ (съотв. $\mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_{12}$).

§7. Двойка асоциирани свързаности на Схаутен-ван Кампе, адаптирани към почти контактна B-метрика структура

В този параграф са въведени и изучени двойка асоциирани афинни свързаности на Схаутен-ван Кампе, адаптирани към контактното разпределение и почти контактната B-метрична структура, породени от двойката асоциирани B-метрики и техните свързаности на Леви-Чивита. С помощта на конструираните несиметрични свързаности са характеризирани основните класове почти контактни B-метрични многообразия. Получени са кривинни свойства на *разглежданите свързаности.*

Основните резултати в параграфа са публикувани в [90].

Свързаността на Схаутен-ван Кампе запазва паралелизма на двойка допълнителни разпределения върху гладно многообразие, снабдено с афинна свързаност [130, 56, 9].

7.1. Забележителни метрични свързаности относно контактното разпределение върху разглежданите многообразия

Разгледани са хоризонталното и вертикалното разпределение $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ в допирателното разслоение $T\mathcal{M}$ върху произволно почти контактно B-метрично многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$.

7.1.1. Свързаност на Схаутен-ван Кампе ∇° асоциирана с ∇. Разгледана е свързаността на Схаутен-ван Кампе ∇°, асоциирана със свързаността на Леви-Чивита ∇ и адаптирана към двойката $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$. Тази свързаност е дефинирана чрез $\nabla^\circ_x y = (\nabla_x y^{\mathrm{h}})^{\mathrm{h}} + (\nabla_x y^{\mathrm{v}})^{\mathrm{v}}$ [130, 56] и се изразява във вида $\nabla^\circ_x y = \nabla_x y - \eta(y)\nabla_x \xi + (\nabla_x \eta)(y)\xi$ [133]. Оттук, потенциалът ѝ Q° относно ∇ и торзията ѝ T° се изразяват като $Q^\circ(x,y) = -\eta(y)\nabla_x\xi + (\nabla_x\eta)(y)\xi$ и $T^\circ(x,y) = \eta(x)\nabla_y\xi - \eta(y)\nabla_x\xi + \mathrm{d}\eta(x,y)\xi$.

Теорема 7.1. Свързаността на Схаутен-ван Кампе ∇° е единствената афинна свързаност с торзия от вида по-горе, запазваща ξ, η и g.

Свързаността ∇° съществува върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ от всеки клас, но ∇° съвпада с ∇, точно когато $\nabla\xi$ се анулира, т.е. за класа $\mathcal{U}_1 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_{10}$, което е твърдението на **Теорема 7.2**.

7.1.2. Условието ∇° да бъде естествена за (φ, ξ, η, g). Изразяваме $\nabla^\circ\varphi$ и налагаме условието да се анулира. Получено е равенството $F(x,y,z) = F(x,y,\xi)\eta(z) + F(x,z,\xi)\eta(y)$, което определя класа $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_4 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{11}$. Очевидно почти контактните B-метрични многообразия могат да се представят като $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$.

Теорема 7.3. Свързаността на Схаутен-ван Кампе ∇° е естествена свързаност за структурата (φ, ξ, η, g) тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на класа $\mathcal{U}_2$. Тогава ∇° съвпада с φB-свързаността.

7.1.3. Свързаността на Схаутен-ван Кампе $\widetilde{\nabla}^\circ$, асоциирана с $\widetilde{\nabla}$. Аналогично е разгледана свързаността на Схаутен-ван Кампе $\widetilde{\nabla}^\circ$, асоциирана със свързаността на Леви-Чивита $\widetilde{\nabla}$ за $\widetilde{g}$ и адаптирана към двойката $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$. Тази свързаност е дефинирана чрез $\widetilde{\nabla}^\circ_x y = (\widetilde{\nabla}_x y^{\mathrm{h}})^{\mathrm{h}} + (\widetilde{\nabla}_x y^{\mathrm{v}})^{\mathrm{v}}$. Тогава хиперразпределението $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ също е паралелно относно $\widetilde{\nabla}^\circ$. Свързаността $\widetilde{\nabla}^\circ$ е изразена във вида $\widetilde{\nabla}^\circ_x y = \widetilde{\nabla}_x y - \eta(y)\widetilde{\nabla}_x\xi + (\widetilde{\nabla}_x\eta)(y)\xi$, а потенциалът ѝ $\widetilde{Q}^\circ$ относно $\widetilde{\nabla}$ и торзията ѝ $\widetilde{T}^\circ$ са $\widetilde{Q}^\circ(x,y) = -\eta(y)\widetilde{\nabla}_x\xi + (\widetilde{\nabla}_x\eta)(y)\xi$ и $\widetilde{T}^\circ(x,y) = \eta(x)\widetilde{\nabla}_y\xi - \eta(y)\widetilde{\nabla}_x\xi + \mathrm{d}\eta(x,y)\xi$.

Теорема 7.4. Свързаността на Схаутен-ван Кампе $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ е единствената афинна свързаност с торзия от вида по-горе, запазваща ξ, η и $\widetilde{g}$.

Ясно е, че $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ съществува върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ от всеки клас, но $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ съвпада с $\widetilde{\nabla}$ тогава и само тогава, когато $\widetilde{\nabla}\xi$ се анулира, т.е. в класа $\widetilde{\mathcal{U}}_1 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_9$, което е **Теорема 7.5**. Съгласно **Лема 7.6.** имаме, че $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{U}_1$, точно когато $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g}) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1$. Тогава имаме

Теорема 7.7. Нека ∇°, $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ са свързаностите на Схаутен-ван Кампе, асоциирани съответно с ∇, $\widetilde{\nabla}$ и адаптирани към $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g, \widetilde{g})$. Тогава следните твърдения са еквивалентни: (i) $\nabla^{\circ} \equiv \nabla$; (ii) $\widetilde{\nabla}^{\circ} \equiv \widetilde{\nabla}$; (iii) $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{U}_1$; (iv) $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g}) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1$.

Следствие 7.8. Ако $\widetilde{\nabla}^{\circ} \equiv \nabla$ или $\nabla^{\circ} \equiv \widetilde{\nabla}$, то четирите свързаности ∇°, $\widetilde{\nabla}^{\circ}$, ∇ и $\widetilde{\nabla}$ съвпадат. Съвпадането на ∇°, $\widetilde{\nabla}^{\circ}$, ∇ и $\widetilde{\nabla}$ е еквивалентно на условието $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ да са косимплектични B-метрични многообразия.

Теорема 7.9. Свързаностите на Схаутен-ван Кампе $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ и ∇° съвпадат тогава и само тогава, когато многообразието принадлежи на класа $\mathcal{U}_2$.

7.1.4. Условията $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ да бъде естествена за $(\varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$. Изразена е връзката на $\widetilde{\nabla}^{\circ}\varphi$ с $\nabla^{\circ}\varphi$. След приравняване на тези величини е получена характеристика на класа $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{U}_3$, където $\mathcal{U}_3 = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_{11}$.

Теорема 7.10. Ковариантните производни на φ относно ∇° и $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ съвпадат, точно когато $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ принадлежат на класа $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{U}_3$.

Установено е, че $\widetilde{\nabla}^{\circ}\varphi = 0$ е еквивалентно на $F(\varphi y, \varphi z, x) + F(\varphi^2 y, \varphi^2 z, x) - F(\varphi z, \varphi y, x) - F(\varphi^2 z, \varphi^2 y, x) = 0$. Тогава имаме

Теорема 7.11. Свързаността на Схаутен-ван Кампе $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ е естествена за $(\varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ е от класа $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{U}_3$.

Теорема 7.12. Свързаностите ∇° и $\widetilde{\nabla}^{\circ}$ са естествени върху $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g, \widetilde{g})$ тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ и $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ са от класа $\mathcal{U}_3$.

7.2. Свойства на потенциалите и торзиите на ∇° и $\widetilde{\nabla}^{\circ}$

Намерени са хоризонталните и вертикалните компоненти на потенциала и торзията на ∇°: $Q^{\circ\mathrm{h}} = S \otimes \eta$, $Q^{\circ\mathrm{v}} = -S^{\flat} \otimes \xi$, $T^{\circ\mathrm{h}} = -\eta \wedge S$, $T^{\circ\mathrm{v}} = -2\mathrm{Alt}(S^{\flat}) \otimes \xi$, където $S^{\flat}(x, y) = g(S(x), y)$ и Alt е алтернацията. Дадена е

Теорема 7.13. Следните еквивалентности са верни: (i) $\nabla\eta$ е симетрично $\Leftrightarrow$ η е затворена $\Leftrightarrow$ $Q^{\circ\mathrm{v}}$ е симетрично $\Leftrightarrow$ $T^{\circ\mathrm{v}} = 0 \Leftrightarrow S$ е самоспрегнат относно g $\Leftrightarrow$ $S^{\flat}$ е симетрично $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \in \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9$; (ii) $\nabla\eta$ е кососиметрично $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_{\xi}g = 0 \Leftrightarrow Q^{\circ\mathrm{v}}$ е кососиметрично $\Leftrightarrow$ S е антисамоспрегнат относно g $\Leftrightarrow$

$S^\flat$ е кососиметрично $\Leftrightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8$; (iii) $\nabla\eta = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\eta = \mathcal{L}_\xi g = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = 0 \Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow S^\flat = 0 \Leftrightarrow \nabla^\circ = \nabla \Leftrightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{U}_1$.

Аналогично, за потенциала и торзията на $\widetilde{\nabla}^\circ$ са получени изрази, от които се достига до следните формули: $\widetilde{Q}^\circ = Q^\circ + (\widetilde{S} - S) \otimes \eta - (\widetilde{S}^\flat - S^\flat) \otimes \xi$, $\widetilde{T}^\circ = T^\circ + (\widetilde{S} - S) \wedge \eta$; $\widetilde{Q}^{\circ\mathrm{h}} = Q^{\circ\mathrm{h}} + (\widetilde{S} - S) \otimes \eta$, $\widetilde{Q}^{\circ\mathrm{v}} = Q^{\circ\mathrm{v}} - (\widetilde{S}^\flat - S^\flat) \otimes \xi$, $\widetilde{T}^{\circ\mathrm{h}} = T^{\circ\mathrm{h}} + (\widetilde{S} - S) \wedge \eta$, $\widetilde{T}^{\circ\mathrm{v}} = T^{\circ\mathrm{v}}$.

Теорема 7.14. Следните еквивалентности са верни: (i) $\widetilde{\nabla}\eta$ е симетрично $\Leftrightarrow \eta$ е затворена $\Leftrightarrow \widetilde{Q}^{\circ\mathrm{v}}$ е симетрично $\Leftrightarrow \widetilde{T}^{\circ\mathrm{v}} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{S}$ е самоспрегнат относно $\widetilde{g} \Leftrightarrow \widetilde{S}^\flat$ е симетрично $\Leftrightarrow (\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g}) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{10}$;
(ii) $\widetilde{\nabla}\eta$ е кососиметрично $\Leftrightarrow \mathcal{L}_\xi \widetilde{g} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{Q}^{\circ\mathrm{v}}$ е кососиметрично $\Leftrightarrow \widetilde{S}$ е антисамоспрегнат относно $\widetilde{g} \Leftrightarrow \widetilde{S}^\flat$ е кососиметрично $\Leftrightarrow (\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g}) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \mathcal{F}_7$;
(iii) $\widetilde{\nabla}\eta = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\eta = \mathcal{L}_\xi \widetilde{g} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\nabla}\xi = 0 \Leftrightarrow \widetilde{S} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{S}^\flat = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\nabla}^\circ = \widetilde{\nabla} \Leftrightarrow (\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, \widetilde{g}) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1$.

7.3. Кривинни свойства на ∇° и $\widetilde{\nabla}^\circ$

Теорема 7.15. Тензорите на кривина на ∇° и ∇ (съответно, на $\widetilde{\nabla}^\circ$ и $\widetilde{\nabla}$) са свързани чрез $R^\circ(x, y, z, w) = R\left(x, y, \varphi^2 z, \varphi^2 w\right) + \pi_1(S(x), S(y), z, w)$, $\widetilde{R}^\circ(x, y, z, w) = \widetilde{R}\left(x, y, \varphi^2 z, \varphi^2 w\right) + \widetilde{\pi}_1(\widetilde{S}(x), \widetilde{S}(y), z, w)$.

Следствие 7.16. Тензорите на Ричи на ∇° и ∇ (съответно, на $\widetilde{\nabla}^\circ$ и $\widetilde{\nabla}$) са свързани чрез $\rho^\circ(y, z) = \rho(y, z) - \eta(z)\rho(y, \xi) - R(\xi, y, z, \xi) - g(S(S(y)), z) + \mathrm{tr}(S) g(S(y), z)$, $\widetilde{\rho}^\circ(y, z) = \widetilde{\rho}(y, z) - \eta(z)\widetilde{\rho}(y, \xi) - \widetilde{R}(\xi, y, z, \xi) - \widetilde{g}(\widetilde{S}(\widetilde{S}(y)), z) + \widetilde{\mathrm{tr}}(\widetilde{S})\widetilde{g}(\widetilde{S}(y), z)$, където $\widetilde{\mathrm{tr}}$ означава следата относно $\widetilde{g}$.

Следствие 7.17. Скаларните кривини на ∇° и ∇ (съответно, на $\widetilde{\nabla}^\circ$ и $\widetilde{\nabla}$) са свързани по следния начин: $\tau^\circ = \tau - 2\rho(\xi, \xi) - \mathrm{tr}(S^2) + (\mathrm{tr}(S))^2$, $\widetilde{\tau}^\circ = \widetilde{\tau} - 2\widetilde{\rho}(\xi, \xi) - \widetilde{\mathrm{tr}}(\widetilde{S}^2) + (\widetilde{\mathrm{tr}}(\widetilde{S}))^2$, където $\rho(\xi, \xi) = \mathrm{tr}(\nabla_\xi S) - \mathrm{div}(S(\xi)) - \mathrm{tr}(S^2)$, $\widetilde{\rho}(\xi, \xi) = \widetilde{\mathrm{tr}}(\widetilde{\nabla}_\xi \widetilde{S}) - \widetilde{\mathrm{div}}(\widetilde{S}(\xi)) - \widetilde{\mathrm{tr}}(\widetilde{S}^2)$.

Следствие 7.18. Секционните кривини на площадка α с произволна база $\{x, y\}$ в $p \in \mathcal{M}$ относно ∇° и ∇ (съответно, на $\widetilde{\nabla}^\circ$ и $\widetilde{\nabla}$) са свързани чрез $k^\circ(\alpha; p) = k(\alpha; p) + \lambda\{\pi_1(S(x), S(y), y, x) - \eta(x)R(x, y, y, \xi) - \eta(y)R(x, y, \xi, x)\}$, $\widetilde{k}^\circ(\alpha; p) = \widetilde{k}(\alpha; p) + \widetilde{\lambda}\{\widetilde{\pi}_1(\widetilde{S}(x), \widetilde{S}(y), y, x) - \eta(x)\widetilde{R}(x, y, y, \xi) - \eta(y)\widetilde{R}(x, y, \xi, x)\}$, където $\lambda = \pi_1^{-1}(x, y, y, x)$, $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\pi}_1^{-1}(x, y, y, x)$.

Накрая на параграфа са намерени секционните кривини, когато α е специална площадка относно структурата, т.е. когато е ξ-площадка, φ-холоморфна площадка и φ-напълно реална площадка.

§8. Сасакиевоподобни почти контактни комплексни риманови многообразия

В този параграф е дефинирано сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие като почти контактно комплексно риманово многообразие, чийто комплексен конус е холоморфно комплексно риманово многообразие. Дадени са явни компактни и некомпактни примери. Представена е канонична конструкция произвеждаща сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие от холоморфно комплексно риманово многообразие, която е наречена $\mathcal{S}^1$-разрешимо разширение.
Основните резултати в параграфа са публикувани в [58].

Почти контактното комплексно риманово многообразие е нечетномерно псевдориманово многообразие снабдено с 1-форма η и разпределение с коразмерност едно $\mathcal{H} = \ker(\eta)$, имащо комплексно риманова структура. По-точно, $2n$-мерното разпределение $\mathcal{H}$ е екипирано с двойка, състояща се от почти комплексна структура и норденова метрика.

Главната цел на този параграф е намиране на клас почти контактни комплексни риманови многообразия, напомнящи основните свойства на добре известните сасакиеви многообразия.

В този параграф се използват следните означения за $(2n+1)$-мерно почти контактно комплексно риманово многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$: $x, y, z, u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $X, Y, Z, U \in \mathcal{H}$, $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = \varphi e_1, \dots, e_{2n} = \varphi e_n\}$ е локална ортонормирана база на $\mathcal{H}$ и $\{e_0 = \xi, e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = \varphi e_1, \dots, e_{2n} = \varphi e_n\}$ е локална ортонормирана база на $T_p\mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$, за които полагаме $\varepsilon_i = \operatorname{sign}(g(e_i, e_i)) = \pm 1$, $\varepsilon_i = 1$ за $i = 0, 1, \dots, n$ и $\varepsilon_i = -1$ за $i = n+1, \dots, 2n$.

8.1. Почти контактно комплексно риманово многообразие

8.1.1. Връзка с холоморфното комплексно риманово многообразие. Припомняме, че $2n$-мерното разпределение $\mathcal{H}$ е снабдено с почти комплексна структура $J = \varphi|_{\mathcal{H}}$ и норденова метрика $h = g|_{\mathcal{H}}$, където $\varphi|_{\mathcal{H}}$ и $g|_{\mathcal{H}}$ са съответно рестрикциите на φ и g върху $\mathcal{H}$. Когато J е паралелна относно свързаността на Леви-Чивита D на h, многообразието е келерово-норденo или холоморфно комплексно риманово многообразие.

8.1.2. Случаят на паралелни структури. Най-простият случай на разглежданите многообразия е когато структурите са ∇-паралелни и следователно $F = \widetilde{F} = 0$. Тогава $\mathcal{H}$ е инволютивно и многообразието локално е псевдориманово произведение на холоморфно комплексно риманово многообразие с реалния интервал.

8.2. Сасакиевоподобни почти контактни комплексни риманови многообразия

Разгледан е комплексният риманов конус над почти контактно комплексно риманово многообразие и е определено сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие с условието комплексният риманов конус да е холоморфно комплексно риманово многообразие.

8.2.1. Холоморфният комплексен риманов конус. Нека $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\times\mathbb{R}^-$ е конусът над $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$, имащ почти комплексна структура $\check{J}$ и комплексна риманова метрика $\check{g}\left(\left(x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right),\left(y,b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\right) = r^2 g(x,y)+\eta(x)\eta(y)-ab$, където r е координатата върху $\mathbb{R}^-$, а a, b са C^∞ функции върху $\mathcal{M}\times\mathbb{R}^-$.

Пресметнати са компонентите на свързаността на Леви-Чивита $\check{\nabla}$ на $\check{g}$ върху $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ и компонентите на $\check{\nabla}\check{J}$. Така е получено

Твърдение 8.1. Комплексният риманов конус $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ над $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е холоморфно комплексно риманово пространство, точно когато са в сила условията $F(X,Y,Z)=F(\xi,Y,Z)=F(\xi,\xi,Z)=0,\ F(X,Y,\xi)=-g(X,Y)$.

Дефиниция 8.1. Едно почти контактно комплексно риманово многообразие $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ се нарича *сасакиевоподобно*, ако структурните тензори φ,ξ,η, g удовлетворяват равенствата в Твърдение 8.1.

Теорема 8.2. Нека $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е почти контактно комплексно риманово многообразие. Следните условия са еквивалентни: (i) $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е сасакиевоподобно; (ii) $\nabla\varphi$ удовлетворява условието $(\nabla_x\varphi)y = -g(x,y)\xi - \eta(y)x + 2\eta(x)\eta(y)\xi$; (iii) N и $\widehat{N}$ удовлетворяват равенствата $N=0$ и $\widehat{N} = -4\left(\widetilde{g}-\eta\otimes\eta\right)\otimes\xi$.

Следствие 8.3. Нека $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е сасакиевоподобно. Тогава имаме: (i) $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е нормално, $N=0$, контактната 1-форма η е затворена, $\mathrm{d}\eta=0$, а интегралните криви на ξ са геодезични, $\nabla_\xi\xi=0$; (ii) θ и θ^* удовлетворяват равенствата $\theta=-2n\,\eta$ и $\theta^*=0$.

8.2.2. Примери.

8.2.2.1. Пример 1. Разгледани са разрешимата $(2n{+}1)$-мерна група на Ли G с база от лявоинвариантни векторни полета $\{e_0,\dots,e_{2n}\}$, дефинирана чрез: $[e_0,e_1]=e_{n+1},\ \dots,\ \ [e_0,e_n]=e_{2n},\ [e_0,e_{n+1}]=-e_1,\ \dots,\ \ [e_0,e_{2n}]=-e_n$, и инвариантна почти контактна комплексна риманова структура, дефинирана чрез: $\xi=e_0$, $\varphi e_i=e_{n+i}$, $g(e_i,e_i)=\varepsilon_i$, $g(e_i,e_j)=0$, $i\neq j\in\{0,1,\dots,2n\}$.

Получено е, че G е следното разрешимо разширение с ранг 1 на абелевата група $\mathbb{R}^{2n}$: $e^0=\mathrm{d}t, e^i=\cos t\ \mathrm{d}x^i+\sin t\ \mathrm{d}x^{n+i}, e^{n+i}=-\sin t\ \mathrm{d}x^i+\cos t\ \mathrm{d}x^{n+i}, i=1,2,\dots,n$, а метриката на сасакиевоподобното G има вида $g=\mathrm{d}t^2+\cos 2t\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i(\mathrm{d}x^i)^2+2\sin 2t\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^{n+i}$. Тогава фактор пространството G/Γ е компактно за някаква решетка Γ и инвариантната структура (φ,ξ,η,g) върху G, спусната до G/Γ, дава компактно сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие. Тогава

$\mathcal{H}$ е интегруемо и съответното интегрално подмногообразие може да се разглежда като холоморфното комплексно риманово плоско пространство $\mathbb{R}^{2n} = \mathrm{span}\{\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^{2n}\}$ с холоморфна комплексна риманова структура: $J\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^{n+1}, \ldots, J\mathrm{d}x^n = \mathrm{d}x^{2n}$; $h = \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i(\mathrm{d}x^i)^2$, $\widetilde{h} = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^{n+i}$.

8.2.2.2. $\mathcal{S}^1$-разрешимо разширение. Разгледано е многообразието $\mathcal{M}^{2n+1} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}^{2n}$, където $(\mathcal{M}^{2n}, J, h, \widetilde{h})$ е $2n$-мерно холоморфно комплексно риманово многообразие. Дефинирана е почти контактна комплексна риманова структура върху $\mathcal{M}^{2n+1}$ чрез $\eta = \mathrm{d}t$, $\varphi|_{\mathcal{H}} = J$, $\eta \circ \varphi = 0$, $g = \mathrm{d}t^2 + \cos 2t\ h - \sin 2t\ \widetilde{h}$, като $\mathrm{d}t$ е координатната 1-форма върху $\mathbb{R}^+$.

Теорема 8.4. Нека $(\mathcal{M}^{2n}, J, h, \widetilde{h})$ е $2n$-мерно холоморфно комплексно риманово многообразие. Тогава многообразието $\mathcal{M}^{2n+1} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}^{2n}$, снабдено с почти контактната комплексна риманова структура, дефинирана по-горе, е сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие. Ако $\mathcal{M}^{2n}$ е компактно, то $\mathcal{M}^{2n+1} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{M}^{2n}$ с горната структура е компактно сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово.

Многообразието, конструирано в последната теорема, е наречено *$\mathcal{S}^1$-разрешимо разширение на холоморфно комплексно риманово многообразие.*

8.2.2.3. Пример 2. Разгледана е 5-мерна група на Ли G^5 с база от лявоинвариантни векторни полета $\{e_0, \ldots, e_4\}$, дефинирана чрез $[e_0, e_1] = \lambda e_2 + e_3 + \mu e_4$, $[e_0, e_2] = -\lambda e_1 - \mu e_3 + e_4$, $[e_0, e_3] = -e_1 - \mu e_2 + \lambda e_4$, $[e_0, e_4] = \mu e_1 - e_2 - \lambda e_3$, където $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Групата G^5 е снабдена с инвариантна почти контактна комплексна риманова структура както при Пример 1 за $n = 2$. Проверено е, че $(G^5, \varphi, \xi, \eta, g)$ е сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие, където $g = \mathrm{d}t^2 - 4\cos 2t\left(\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^4\right) - 4\sin 2t\left(\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\right)$. Тогава $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_4\}$ е интегруемо и съответното интегрално подмногообразие може да се разглежда като холоморфното комплексно риманово плоско пространство $\mathbb{R}^4 = \mathrm{span}\{\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^4\}$ със структура $J\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^3$, $J\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^4$; $h = -4(\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^4)$, $\widetilde{h} = 4(\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3)$ и метриката g приема вида $g = \mathrm{d}t^2 + \cos 2t\, h - \sin 2t\, \widetilde{h}$.

8.3. Кривинни свойства

Твърдение 8.5. За сасакиевоподобно $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е в сила формулата $R(x, y, \varphi z, u) - R(x, y, z, \varphi u) = A(y, z)g(x, \varphi u) + A(y, u)g(x, \varphi z) - A(x, z)g(y, \varphi u) - A(x, u)g(y, \varphi z)$, където $A(y, z) = g(y, z) - 2\eta(y)\eta(z)$. В частност имаме $R(x, y)\xi = \eta(y)x - \eta(x)y$, $\nabla_\xi X = -\varphi X - [X, \xi] \in \mathcal{H}$, $[X, \xi] \in \mathcal{H}$; $R(\xi, X)\xi = -X$, $\mathrm{Ric}(y, \xi) = 2n\,\eta(y)$, $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) = 2n$.

8.3.1. Хоризонталната кривина. Тъй като $\mathrm{d}\eta = 0$, многообразието локално е $\mathcal{M}^{2n+1} = \mathcal{M}^{2n} \times \mathbb{R}$ с $T\mathcal{M}^{2n} = \mathcal{H}$, като подмногообразието $(\mathcal{M}^{2n}, J = \varphi|_{\mathcal{H}}, h = g|_{\mathcal{H}})$ е холоморфно комплексно риманово многообразие. Можем да разглеждаме $\mathcal{M}^{2n}$ като хиперповърхнина на $\mathcal{M}$ с единично нормално векторно поле $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ и втора основна форма $\widetilde{g}|_{\mathcal{H}} = \widetilde{h}$. Гаусовото уравнение дава $R(X,Y,Z,U) = R^h(X,Y,Z,U) + g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,U) - g(\varphi Y,Z)g(\varphi X,U)$, където R^h е тензорът на кривина на $(\mathcal{M}^{2n},J,h)$. За хоризонталния тензор на Ричи Ric е получено, че е равен на Ric^h, т.е. тензора на Ричи на $h = g|_{\mathcal{H}}$. Установено е, че римановата кривина на сасакиевоподобно $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е напълно определена чрез кривината на $(\mathcal{M}^{2n},J,h)$, $T\mathcal{M}^{2n} = \mathcal{H}$.

8.3.2. Пример 3: $\mathcal{S}^1$-разрешимо разширение на h-сферата. Този пример илюстрира Теорема 8.4. Разгледано е плоското холоморфно комплексно риманово многообразие $(\mathbb{R}^{2n+2},J',h',\widetilde{h}')$, като $n>2$, $h'(x',y') = \sum_{i=1}^{n+1}\left(x^iy^i - x^{n+i+1}y^{n+i+1}\right)$, $\widetilde{h}'(x',y') = -\sum_{i=1}^{n+1}\left(x^iy^{n+i+1} + x^{n+i+1}y^i\right)$ за $x' = (x^1,\ldots,x^{2n+2})$ и $y' = (y^1,\ldots,y^{2n+2})$ в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Разгледана е h-сферата $\mathcal{S}_h^{2n}(z_0';a,b)$, дефинирана чрез $h'(z'-z_0',z'-z_0') = a$, $\widetilde{h}'(z'-z_0',z'-z_0') = b$, $(0,0)\neq(a,b)\in\mathbb{R}^2$, която е снабдена с холоморфна комплексна риманова структура $(J'|_{\mathcal{S}_h^{2n}},h'|_{\mathcal{S}_h^{2n}})$.

Многообразието $\mathcal{M}^{2n+1} = \mathbb{R}^+\times\mathcal{S}_h^{2n}$, снабдено с почти контактната комплексна риманова структура: $\eta = \mathrm{d}t$, $\varphi|_{\mathcal{H}} = J'|_{\mathcal{S}_h^{2n}}$, $\eta\circ\varphi = 0$, $g = \mathrm{d}t^2 + \cos 2t\, h'|_{\mathcal{S}_h^{2n}} - \sin 2t\,\widetilde{h}'|_{\mathcal{S}_h^{2n}}$, е сасакиевоподобно. Хоризонталните норденови метрики върху $\mathcal{M}^{2n+1}$ са $h = g|_{\mathcal{H}} = \cos 2t\, h'|_{\mathcal{S}_h^{2n}} - \sin 2t\,\widetilde{h}'|_{\mathcal{S}_h^{2n}}$ и $\widetilde{h} = \widetilde{g}|_{\mathcal{H}} = \sin 2t\, h'|_{\mathcal{S}_h^{2n}} + \cos 2t\,\widetilde{h}'|_{\mathcal{S}_h^{2n}}$. Получени са формулите за тензорите на кривина $R^h = \cos 2t\, R'|_{\mathcal{S}_h^{2n}} - \sin 2t\, J'R'|_{\mathcal{S}_h^{2n}}$ и $R|_{\mathcal{H}} = R^h - (\sin 2t)^2\pi_1 - (\cos 2t)^2\pi_2 + \sin 2t\cos 2t\,\pi_3$, както и изразяването на съответните тензори на Ричи $\mathrm{Ric}|_{\mathcal{H}} = \mathrm{Ric}^h = \frac{2(n-1)}{a^2+b^2}[(\cos 2t - b\sin 2t)h + (b\cos 2t + \sin 2t)\widetilde{h}]$.

8.4. Контактни конформни (хомотетични) трансформации

Припомнено е, че общата контактна конформна трансформация на почти контактно комплексно риманово многообразие $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е дефинирана чрез $\overline{\eta} = e^w\eta$, $\overline{\xi} = e^{-w}\xi$, $\overline{g}(x,y) = e^{2u}\cos 2v\, g(x,y) + e^{2u}\sin 2v\, g(x,\varphi y) + (e^{2w} - e^{2u}\cos 2v)\eta(x)\eta(y)$, където u, v, w са гладки функции [78, 95, 96]. Ако u, v, w са константи, имаме *контактна хомотетична трансформация*.

Твърдение 8.6. Нека $(\mathcal{M},\varphi,\xi,\eta,g)$ е сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие. Тогава структурата $(\varphi,\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ е сасакиевоподобна тогава и само тогава, когато u,v,w удовлетворяват условията $\mathrm{d}w\circ\varphi = 0$, $\mathrm{d}u - \mathrm{d}v\circ\varphi = 0$, $\mathrm{d}u\circ\varphi + \mathrm{d}v = (1-e^w)\eta$. Когато $w=0$, глобалните u и v не зависят от ξ и са локално дефинирани върху $\mathcal{M}^{2n}$, $T\mathcal{M}^{2n} = \mathcal{H}$, а комплексната функция $u + \sqrt{-1}\,v$ е холоморфна върху $\mathcal{M}^{2n}$.

8.4.1. Контактни хомотетични трансформации. Намерени са зависимостите между свързаностите на Леви-Чивита $\overline{\nabla}$ и ∇ на $\overline{g}$ и g и връзката между съответните тензори на кривина $\overline{R}$ и R.

Твърдение 8.7. Тензорът на Ричи на почти контактно комплексно римановo многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е инвариантен при контактна хомотетична трансформация, $\overline{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}$. Следователно имаме $\overline{\mathrm{Scal}} = e^{-2u}\cos 2v\ \mathrm{Scal} - e^{-2u}\sin 2v\ \mathrm{Scal}^* + \left(e^{-2w} - e^{-2u}\cos 2v\right)\mathrm{Ric}(\xi,\xi)$ и $\overline{\mathrm{Scal}}^* = e^{-2u}\sin 2v\ \mathrm{Scal} + e^{-2u}\cos 2v\ \mathrm{Scal}^* \ - e^{-2u}\sin 2v\ \mathrm{Ric}(\xi,\xi)$. В частност, скаларните кривини на сасакиевоподобно $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ се сменят при контактна хомотетична трансформация с $w = 0$ чрез $\overline{\mathrm{Scal}} = e^{-2u}\cos 2v\ \mathrm{Scal} - e^{-2u}\sin 2v\ \mathrm{Scal}^* + 2n\left(1 - e^{-2u}\cos 2v\right)$, $\overline{\mathrm{Scal}}^* = e^{-2u}\sin 2v\ \mathrm{Scal} + e^{-2u}\cos 2v\ \mathrm{Scal}^* - 2n\, e^{-2u}\sin 2v$.

Твърдение 8.8. Сасакиевоподобно почти контактно комплексно римановo многообразие $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е айнщайново тогава и само тогава, когато базовото холоморфно комплексно риманово многообразие $(\mathcal{M}^{2n}, J, h)$, $T\mathcal{M}^{2n} = \mathcal{H}$ е айнщайново със скаларна кривина, независеща от ξ.

За айнщайново сасакиевоподобно $(\mathcal{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е приложена контактна хомотетична трансформация $\overline{\eta} = \eta$, $\overline{\xi} = \xi$, $\overline{g}(x,y) = c\ g(x,y) + d\ g(x,\varphi y) + (1-c)\eta(x)\eta(y)$, където c, d са константи. Получена е формулата $\overline{\mathrm{Ric}}(x,y) = \mathrm{Ric}(x,y) = 2n\, g(x,y) = \frac{2n}{c^2+d^2}\{c\,\overline{g}(x,y) - d\,\overline{g}(x,\varphi y) + (c^2 + d^2 - c)\eta(x)\eta(y)\}$. Сасакиевоподобно пространство, чийто тензор на Ричи удовлетворява тази формула, е наречено *η-комплексно-айнщайново сасакиевоподобно многообразие* и ако $d = 0$, имаме *η-айнщайново сасакиевоподобно пространство.*

Твърдение 8.9. Всяко η-комплексно-айнщайново сасакиевоподобно пространство е контактно хомотетично на айнщайново сасакиевоподобно пространство.

Глава II. Върху многообразия с почти хиперкомплексни структури и почти контактни 3-структури, снабдени с метрики от ермитово-норденов тип

§9. Почти хиперкомплексни многообразия с ермитово-норденови метрики

В този параграф са дадени някои факти за почти хиперкомплексните многообразия с ермитово-норденови метрики, известни от [2, 46, 47, 82].

Припомнено е понятието почти хиперкомплексна структура H върху многообразие $\mathcal{M}^{4n}$ като тройка антикомутиращи почти комплексни структури, такива че всяка от тях е композиция на другите две структури [2, 134].

Хиперкомплексната структура H е снабдена с метрична структура G, породена от псевдориманова метрика g с неутрална сигнатура [46, 47]. В нашия случай е получено, че g е ермитова метрика относно едната почти комплексна структура, а относно другите две почти комплексни структури g е норденова метрика. Така в G, освен g, се включват три асоциирани (0,2)-тензори чрез H: една келерова форма и две метрики от типа на g. По тази причина породената почти хиперкомплексна структура е наречена *почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики*.

За почти хиперкомплексната структура $H=(J_\alpha)$, $(\alpha=1,2,3)$ и метриката g имаме свойствата $g(\cdot,\cdot)=\varepsilon_\alpha g(J_\alpha\cdot,J_\alpha\cdot)$, където $\varepsilon_\alpha=1$ за $\alpha=1$ и $\varepsilon_\alpha=-1$ за $\alpha=2;3$. Асоциираната (келерова) 2-форма g_1 и асоциираните метрики g_2 и g_3 са определени чрез $g_\alpha(\cdot,\cdot)=g(J_\alpha\cdot,\cdot)=-\varepsilon_\alpha g(\cdot,J_\alpha\cdot)$.

Фундаменталните тензори на многообразието (M,H,G) и съответните им лиеви форми θ_α са дефинирани чрез $F_\alpha(x,y,z)=g((\mathrm{D}_x J_\alpha)\,y,z)=(\mathrm{D}_x\, g_\alpha)\,(y,z)$, където D е свързаността на Леви-Чивита, породена от g, и $\theta_\alpha(\cdot)=g^{ij}F_\alpha(e_i,e_j,\cdot)$ за произволна база $\{e_1,e_2,\dots,e_{4n}\}$ на $T_p\mathcal{M}$, $p\in\mathcal{M}$. Дадени са релациите между тензорите F_α.

Многообразията (M,H,G) с D-паралелни J_α за всяко α се наричат *хиперкелерови многообразия с ермитово-норденови метрики* и образуват клас $\mathcal{K}$. Едно достатъчно условие да бъде $(\mathcal{M},H,G)$ в $\mathcal{K}$, е две от почти комплексните структури на H да са келерови [46].

Казваме, че (M,H,G) е *изотропно хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики*, ако $\|\mathrm{D}J_\alpha\|^2=0$ за всяка J_α на H, където инвариантната квадратична норма е $\|\mathrm{D}J_\alpha\|^2=g^{ij}g^{kl}g((\mathrm{D}_i\,J_\alpha)\,e_k,(\mathrm{D}_j\,J_\alpha)\,e_l)$ относно произволна база $\{e_1,e_2,\dots,e_{4n}\}$ на $T_p\mathcal{M}$, $p\in\mathcal{M}$.

Многообразието $(\mathcal{M},J_1,g)$ е почти ермитово, а многообразията $(\mathcal{M},J_2,g)$ и $(\mathcal{M},J_3,g)$ са почти норденови. Основните класове на тези два типа многообразия са дадени съответно в [44] и [34]. Те са означени съответно като $\mathcal{W}_i(J_1)$, $i=1,2,3,4$ и $\mathcal{W}_j(J_\alpha)$, $j=1,2,3;\alpha=2,3$. Специалните класове $\mathcal{W}_0(J_\alpha):F_\alpha=0$ $(\alpha=1,2,3)$ на многообразията от келеров тип принадлежат на всеки друг клас от съответната класификация.

В 4-мерния случай четирите основни класа на почти ермитовите многообразия се свеждат до два: $\mathcal{W}_2(J_1)$, класът на почти келеровите многообразия, и $\mathcal{W}_4(J_1)$, класът на ермитовите многообразия относно J_1.

По дефиниция почти хиперкомплексната структура $H=(J_\alpha)$ е *хиперкомплексна структура*, ако тензорите на Нейехаус $[J_\alpha,J_\alpha]$ са нулеви за всяко α [18, 2]. Освен това е известно, че H е хиперкомплексна тогава и само тогава, когато два от $[J_\alpha, J_\alpha]$ са нулеви. Тогава класът на хиперкомплексните (M, H, G) е $\mathcal{HC} = \mathcal{W}_4(J_1) \cap (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)(J_2) \cap (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)(J_3)$.

Тензорът на кривина R за D е дефиниран както обикновено. Очевидно R е *тензор от келеров тип* върху произволно хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики, т.е. $\varepsilon_\alpha R(x, y, J_\alpha z, J_\alpha w) = \varepsilon_\alpha R(J_\alpha x, J_\alpha y, z, w) = R(x, y, z, w)$. В тази връзка са припомнени следните основни свойства.

Теорема 9.1. Всяко хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики е плоско псевдориманово многообразие със сигнатура $(2n, 2n)$.

Теорема 9.2. Всеки тензор от келеров тип върху почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики е нулев.

§10. Хиперкомплексни структури с ермитово-норденови метрики върху 4-мерни алгебри на Ли

В този параграф са разгледани интегруеми хиперкомплексни структури с ермитови и норденови метрики върху групи на Ли от размерност 4. Конструирани са съответните пет типа на инвариантните хиперкомплексни структури с хиперермитова метрика. Разгледани са различните случаи относно сигнатурата на основната псевдориманова метрика.

Основните резултати в параграфа са публикувани в [86].

Проучването в този параграф е вдъхновено от [6], където са класифицирани инвариантните хиперкомплексни структури H върху 4-мерни реални групи на Ли, като метриката е положително дефинитна и ермитова относно тройката комплексни структури на H. Нашата цел е да класифицираме 4-мерните реални алгебри на Ли, които допускат хиперкомплексни структури с ермитово-норденови метрики.

Една хиперкомплексна структура се нарича *абелева* [8], ако $[J_\alpha x, J_\alpha y] = [x, y]$, за всички $x, y \in \mathfrak{l}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Абелевите хиперкомплексни структури са разгледани в [7, 27] и могат да възникнат само върху разрешими алгебри на Ли [30]. Ясно е, че абелевите комплексни структури и следователно абелевата хиперкомплексна структура са интегруеми.

Основният проблем тук е съществуването и геометричните характеристики на хиперкомплексни структури с ермитово-норденови метрики върху 4-мерни алгебри на Ли съгласно класификацията в [6]. Основният резултат е конструирането на различните типове на разглежданите структури и тяхната характеризация.

Нека $\mathcal{L}$ е просто свързана 4-мерна реална група на Ли, допускаща инвариантна хиперкомплексна структура, а $\mathfrak{l}$ е алгебрата на Ли за $\mathcal{L}$. Тогава е в сила следната

Теорема 10.1 ([6]). Единствените 4-мерни алгебри на Ли, допускащи интегруема хиперкомплексна структура, са следните типове: ***(hc1)*** $\mathfrak{l}$ е абелева; ***(hc2)*** $\mathfrak{l} \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3)$; ***(hc3)*** $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{C})$; ***(hc4)*** $\mathfrak{l}$ е разрешимата алгебра на Ли, съответна на $\mathbb{R}H^4$; ***(hc5)*** $\mathfrak{l}$ е разрешимата алгебра на Ли, съответна на $\mathbb{C}H^2$, където $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3)$ е алгебрата на Ли на групите на Ли $U(2)$ и $S^3 \times S^1$; $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ е алгебрата на Ли на групата на афинните движения в $\mathbb{C}$ – единствената 4-мерна алгебра на Ли, носеща абелева хиперкомплексна структура; $\mathbb{R}H^4$ е реалното хиперболично пространство; $\mathbb{C}H^2$ е комплексното хиперболично пространство.

Разглеждаме $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, база на 4-мерната реална алгебра на Ли $\mathfrak{l}$ с породена алгебра на Ли $\mathfrak{l}' = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Дефинирана е стандартна хиперкомплексна структура върху $\mathfrak{l}$ както в [134] и е въведена псевдоевклидова метрика g с неутрална сигнатура чрез $g(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 - x^3y^3 - x^4y^4$, $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $y(y^1, y^2, y^3, y^4) \in \mathfrak{l}$. Така е получена почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики върху $\mathfrak{l}$.

Разгледани са различните случаи на Теорема 10.1.

10.1. Хиперкомплексна структура от тип (hc1)

Очевидно разглежданото многообразие принадлежи на класа $\mathcal{K}$.

10.2. Хиперкомплексна структура от тип (hc2)

Нека $\mathfrak{l}$ не е разрешима и е определена чрез $[e_2, e_4] = e_3$, $[e_4, e_3] = e_2$, $[e_3, e_2] = e_4$, като $(+)$-единичният вектор $e_1 \in \mathbb{R}$ е ортогонален на $\mathfrak{l}'$ относно g. Пресметнати са ковариантните производни относно свързаността на Леви-Чивита D в базата, компонентите $(F_\alpha)_{ijk} = F_\alpha(e_i, e_j, e_k)$ и $(\theta_\alpha)_i = (\theta_\alpha)(e_i)$, $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Така е получено

Твърдение 10.2. Хиперкомплексното многообразие с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли, определена както в този случай, принадлежи на най-широкия клас $\mathcal{HC}$ на разглежданите многообразия, но не принадлежи нито на $\mathcal{W}_1$, нито на $\mathcal{W}_2$ за J_2 и J_3.

Другата възможност е сигнатурата на g върху $\mathbb{R}$ да бъде $(-)$. С аналогични пресмятания е получено отново Твърдение 10.2.

10.3. Хиперкомплексна структура от тип (hc3)

Анализирани са случаите (1,1), (0,2) и (2,0) за сигнатурата на g върху $\mathfrak{l}'$.

10.3.1. Случай 1. Първо, разгледана е g със сигнатура (1,1) върху $\mathfrak{l}'$. Определена е $\mathfrak{l}$ чрез $[e_2, e_3] = [e_1, e_4] = e_2$, $[e_2, e_1] = [e_4, e_3] = e_4$. Тогава, чрез аналогични пресмятания на тези за предишния тип, е доказано

Твърдение 10.3. Хиперкомплексното многообразие с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли, определена както в този случай, принадлежи на $\mathcal{W}_0(J_1)\cap(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)\,(J_2)\cap(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)\,(J_3)$, но не принадлежи нито на $\mathcal{W}_1$, нито на $\mathcal{W}_2$ за J_2 и J_3.

10.3.2. Случай 2. Тук е разгледана g със сигнатура (2,0) върху $\mathfrak{l}'$. Случаят за сигнатура (0,2) е подобен. Определена е $\mathfrak{l}$ чрез $[e_1, e_3] = [e_4, e_2] = e_1$, $[e_1, e_4] = [e_2, e_3] = e_2$. Тогава е получено

Твърдение 10.4. Хиперкомплексното многообразие с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли, определена както в този случай, принадлежи на класа $\mathcal{W}^0$ на (локално) конформно еквивалентните $\mathcal{K}$-многообразия.

10.4. Хиперкомплексна структура от тип (hc4)

Тук $\mathfrak{l}$ е разрешима, а породената алгебра на Ли $\mathfrak{l}'$ е 3-мерна и абелева.

10.4.1. Случай 1. Избран е вектор $e_1 \in \mathfrak{l}$, за който $g(e_1, e_1) = 1$, като елемент ортогонален на $\mathfrak{l}'$ относно g. Тогава $\mathfrak{l}$ е определена чрез $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_4$. Така е получено

Твърдение 10.5. Хиперкомплексното многообразие с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли, определена както в този случай, принадлежи на $\mathcal{HC}$, но не принадлежи нито на $\mathcal{W}_1$, нито на $\mathcal{W}_2$ за J_2 и J_3.

10.4.2. Случай 2. Избран е вектор $e_4 \in \mathfrak{l}$, за който $g(e_4, e_4) = -1$, като елемент ортогонален на $\mathfrak{l}'$ относно g. Тогава $\mathfrak{l}$ е определена чрез $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$. Така е получено

Твърдение 10.6. Хиперкомплексното многообразие с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли, определена както в този случай, принадлежи на класа $\mathcal{W}^0$ на (локално) конформно еквивалентните $\mathcal{K}$-многообразия.

10.5. Хиперкомплексна структура от тип (hc5)

За този тип $\mathfrak{l}$ е разрешима, а $\mathfrak{l}'$ е 3-мерна хайзенбергова алгебра.

10.5.1. Случай 1. Избран е вектор $e_1 \in \mathfrak{l}$, за който $g(e_1, e_1) = 1$, като елемент ортогонален на $\mathfrak{l}'$ относно g. Тогава $\mathfrak{l}$ е определена чрез $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = \frac{1}{2}e_3$, $[e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_4$, $[e_3, e_4] = \frac{1}{2}e_2$. Така е получено

Твърдение 10.7. Хиперкомплексното многообразие с ермитово-норденови метрики върху 4-мерна алгебра на Ли, определена както в този случай, принадлежи на $\mathcal{HC}$, но не принадлежи нито на $\mathcal{W}_1$, нито на $\mathcal{W}_2$ за J_2 и J_3.

10.5.2. Случай 2. Избран е вектор $e_4 \in \mathfrak{l}$, $g(e_4, e_4) = -1$, като елемент ортогонален на $\mathfrak{l}'$ относно g. Като се пренареди базата от Случай 1, $\mathfrak{l}$ е определена чрез $[e_1, e_2] = -\frac{1}{2}e_3$, $[e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1$, $[e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2$, $[e_3, e_4] = -e_3$. Тогава се получава аналогично твърдение на Твърдение 10.7.

§11. Допирателни разслоения с пълен лифт на базовата метрика и почти хиперкомплексна ермитово-норденова структура

В този параграф е изучено допирателното разслоение на почти норденово многообразие с пълен лифт на норденовата метрика като $4n$-мерно многообразие. То е снабдено с почти хиперкомплексна ермитово-норденова структура и е характеризирано геометрично. Разгледан е случаят, когато базовото многообразие е h-сфера.
Основните резултати в параграфа са публикувани в [87].

Използвани са хоризонтални и вертикални лифтове на векторните полета върху $\mathcal{M}$, за да се получат съответните компоненти на разглежданите тензорни полета върху допирателното разслоение $T\mathcal{M}$. Тези компоненти са достатъчни, за да се опишат характеристичните тензорни полета върху $T\mathcal{M}$.

11.1. Почти хиперкомплексна структура върху допирателното разслоение

Разгледано е почти комплексно многообразие $(\mathcal{M}, J)$ с афинна свързаност D. Дефинирани са почти комплексните структури J_1, J_2 и J_3 на H в $T\mathcal{M}$ чрез действието им над хоризонталния лифт X' и вертикалния лифт X'' на произволно векторно поле $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ в $u \in T_p\mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$, по следния начин: $J_1 : X' \to -(JX)'$, $X'' \to (JX)''$; $J_2 : X' \to X''$, $X'' \to -X'$; $J_3 : X' \to (JX)''$, $X'' \to (JX)'$. Така е получено

Твърдение 11.1. В допирателното разслоение $T\mathcal{M}$ над почти комплексно многообразие $(\mathcal{M}, J)$ с афинна свързаност D съществува почти хиперкомплексна структура H, дефинирана както по-горе. Конструираното $4n$-мерно многообразие е почти хиперкомплексно многообразие $(T\mathcal{M}, H)$.

Ако D е симетрична и тензорът ѝ на кривина е R, тогава имаме изразите: $[X', Y'] = [X, Y]' - \{R(X, Y)u\}''$, $[X', Y''] = (\mathrm{D}_X Y)''$, $[X'', Y'] = -(\mathrm{D}_Y X)''$, $[X'', Y''] = 0$ [152]. Тогава, ако $[J, J]$ е тензорът на Нейехаус за J, имаме

Твърдение 11.2. Тензорите на Нейехаус на $H = (J_1, J_2, J_3)$ върху $T\mathcal{M}$ за съответните хоризонтални и вертикални лифтове имат следния вид:
$[J_1, J_1](X', Y') = ([J, J](X, Y))' - (R(JX, JY)u + JR(JX, Y)u + JR(X, JY)u - R(X, Y)u)''$, $[J_1, J_1](X', Y'') = -((\mathrm{D}_{JX} J)(Y) - (\mathrm{D}_X J)(JY))''$,
$[J_1, J_1](X'', Y') = -((\mathrm{D}_Y J)(JX) - (\mathrm{D}_{JY} J)(X))''$, $[J_1, J_1](X'', Y'') = 0$;
$[J_2, J_2](X', Y') = -[J_2, J_2](X'', Y'') = (R(X, Y)u)''$,
$[J_2, J_2](X', Y'') = [J_2, J_2](X'', Y') = (R(X, Y)u)'$;
$[J_3, J_3](X', Y') = -(J(\mathrm{D}_X J)(Y) - J(\mathrm{D}_Y J)(X))' + (R(X, Y)u)''$,

$[J_3, J_3](X', Y'') = -(J\,(\mathrm{D}_X\, J)\,(Y) + (\mathrm{D}_{JY}\, J)\,(X))'' + (JR(X, JY)u)'$,
$[J_3, J_3](X'', Y') = ((\mathrm{D}_{JX}\, J)\,(Y) + J\,(\mathrm{D}_Y\, J)\,(X))'' + (JR(JX, Y)u)'$,
$[J_3, J_3](X'', Y'') = ((\mathrm{D}_{JX}\, J)\,(Y) - (\mathrm{D}_{JY}\, J)\,(X))' - (R(JX, JY)u)''$.

Теорема 11.3. При направените предположения верни са релациите: (i) $(T\mathcal{M}, J_\alpha)$ за $\alpha = 1$ или 3 е комплексно тогава и само тогава, когато $\mathcal{M}$ е плоско и J е паралелна; (ii) $(T\mathcal{M}, J_2)$ е комплексно тогава и само тогава, когато $\mathcal{M}$ е плоско; (iii) $(T\mathcal{M}, H)$ е хиперкомплексно тогава и само тогава, когато $\mathcal{M}$ е плоско и J е паралелна.

Следствие 11.4. (i) $(T\mathcal{M}, J_1)$ е комплексно тогава и само тогава, когато $(T\mathcal{M}, J_3)$ е комплексно. (ii) Ако $(T\mathcal{M}, J_1)$ или $(T\mathcal{M}, J_3)$ е комплексно, то $(T\mathcal{M}, H)$ е хиперкомплексно.

11.2. Пълен лифт на базовата метрика върху допирателното разслоение

Въведена е метрика $\widehat{g}$ върху $T\mathcal{M}$, която е пълният лифт на базовата метрика g върху $\mathcal{M}$, чрез $\widehat{g}(X', Y') = \widehat{g}(X'', Y'') = 0$, $\widehat{g}(X', Y'') = \widehat{g}(X'', Y') = g(X, Y)$. Тя е псевдориманова със сигнатура (m, m), където $m = \dim \mathcal{M}$. Знае се, че $(T\mathcal{M}, \widehat{g})$ има нулева скаларна кривина и е айнщайново пространство тогава и само тогава, когато $\mathcal{M}$ е ричи-плоско [152]. Освен това, ако D е свързаността на Леви-Чивита за g върху $\mathcal{M}$, то $\widehat{\mathrm{D}}$ – пълният лифт на D е свързаността на Леви-Чивита за $\widehat{g}$ върху $T\mathcal{M}$ [154]. Тогава са пресметнати компонентите на $\widehat{\mathrm{D}}$, на съответните тензор на кривина $\widehat{R}$ и тензор на Ричи $\widehat{\rho}$, откъдето е получено

Следствие 11.5. (i) $(T\mathcal{M}, \widehat{g})$ е плоско тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, g)$ е плоско. (ii) $(T\mathcal{M}, \widehat{g})$ е ричи-плоско тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, g)$ е ричи-плоско. (iii) $(T\mathcal{M}, \widehat{g})$ е скаларно плоско.

Показаните резултати в тази част от параграфа се потвърждават и от [152], където g е риманова метрика.

11.3. Допирателно разслоение с почти хиперкомплексна структура и ермитово-норденови метрики

Разглеждаме $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$, което е почти комплексно многообразие с двойка асоциирани норденови метрики g и $\widetilde{g}$, а $(T\mathcal{M}, H)$ е неговото почти хиперкомплексно допирателно разслоение с ермитово-норденова структура $\widehat{G} = (\widehat{g}, \widehat{g}_1, \widehat{g}_2, \widehat{g}_3)$, породена както в §9 от $\widehat{g}$ върху $T\mathcal{M}$. Породеното $4n$-мерно многообразие е означено чрез $(T\mathcal{M}, H, \widehat{G})$.

Теорема 11.6. Многообразието $(T\mathcal{M}, H, \widehat{G})$ е почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики.

Твърдение 11.7. Ненулевите компоненти на F_α относно хоризонталните и вертикалните лифтове на векторните полета зависят от фундаменталния тензор F и тензора на кривина R на $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ по следния начин: $F_1(X', Y', Z') = -R(u, X, JY, Z) - R(u, X, Y, JZ)$, $F_1(X', Y', Z'')$ $= -F_1(X', Y'', Z') = -F(X, Y, Z)$; $F_2(X', Y', Z'') = -F_2(X', Y'', Z')$ $= R(u, X, Y, Z)$; $F_3(X', Y', Z') = F_3(X', Y'', Z'') = F(X, Y, Z)$, $F_3(X', Y', Z'') = -R(u, X, Y, JZ)$, $F_3(X', Y'', Z') = R(u, X, JY, Z)$.

Имайки предвид съответните класификации от §9, е получено следното

Твърдение 11.8. (i) Почти ермитовото многообразие $(T\mathcal{M}, J_1, \widehat{g})$ принадлежи на класа $\{(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4) \setminus \{\mathcal{W}_1 \cup (\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4)\}\} \cup \mathcal{W}_0$, където $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$, $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ и $\mathcal{W}_0$ са съответно класовете на почти ермитовите, приблизително келеровите, ермитовите и келеровите многообразия. В 4-мерния случай класът на $(T\mathcal{M}, J_1, \widehat{g})$ се ограничава до класа $\mathcal{W}_2$ на почти келеровите многообразия. (ii) Почти норденовото многообразие $(T\mathcal{M}, J_\alpha, \widehat{g})$, $(\alpha = 2, 3)$, принадлежи на класа $\{(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3) \setminus \{(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2) \cup (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3)\}\} \cup \mathcal{W}_0$.

Пресметнати са компонентите на лиевите форми θ_α, като ненулевите от тях са: $\theta_1(Z') = \theta_3(Z'') = \theta(Z)$, $\theta_2(Z') = -\rho(u, Z)$, $\theta_3(Z') = \rho^*(u, Z)$, където ρ и ρ^* са тензорът на Ричи и асоциираният му тензор, породени от g и J.

Твърдение 11.9. В сила са следните необходими и достатъчни условия: (i) $\theta_1 = 0$ тогава и само тогава, когато $\theta = 0$; (ii) $\theta_2 = 0$ тогава и само тогава, когато $\rho = 0$; (iii) $\theta_3 = 0$ тогава и само тогава, когато $\theta = 0$ и $\rho^* = 0$.

Да припомним, че условието за анулиране на лиевата форма определя съответно класа $(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_1)$ на полукелеровите многообразия сред почти норденовите многообразия и класа $(\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_\alpha)$, $(\alpha = 2, 3)$ сред почти норденовите многообразия.

Твърдение 11.10. В сила са следните необходими и достатъчни условия: (i) $(T\mathcal{M}, J_\alpha, \widehat{g})$, $(\alpha = 1, 3)$ има паралелна J_α тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е плоско и J е паралелна. (ii) $(T\mathcal{M}, J_2, \widehat{g})$ има паралелна J_2 тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е плоско. (iii) $(T\mathcal{M}, H, G)$ е хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е плоско и J е паралелна.

Следствие 11.11. (i) J_1 е паралелна тогава и само тогава, когато J_3 е паралелна. (ii) Ако J_1 или J_3 е паралелна, тогава $(T\mathcal{M}, H, \widehat{G})$ е хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики.

Следствие 11.12. (i) Ако $(T\mathcal{M}, J_\alpha, \widehat{g})$ за произволно α е комплексно многообразие, тогава то е от келеров тип. (ii) Ако $(T\mathcal{M}, H, \widehat{G})$ е хиперкомплексно, тогава то е хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики.

Следствие 11.13. (i) Ако $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е плоско, то $T\mathcal{M}$ има паралелна J_2. (ii) Ако $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е плоско и лиевата му форма θ е нулева, то $(T\mathcal{M}, H, \widehat{G}) \in (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_1) \cup \mathcal{W}_0(J_2) \cup (\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_3)$; (iii) Ако $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е келерово-норденово многообразие, то $(T\mathcal{M}, J_1, \widehat{g}) \in \mathcal{W}_2(J_1)$.

11.3.1. Допирателно разслоение на h-сфера. Нека $(\mathcal{M}, J, g, \widetilde{g})$ е келерово-норденово многообразие, $\dim \mathcal{M} = 2n \geq 4$. Тъй като R е от келеров тип, то асоциираният му тензор R^*: $R^*(x, y, z, w) = R(x, y, z, Jw)$ е кривиноподобен тензор [35]. Следователно имаме секционни кривини относно R и R^*. Припомняме, че една 2-мерна площадка β се казва, че е *холоморфна* (съотв., *напълно реална*), ако $\beta = J\beta$ (съотв., $\beta \perp J\beta \neq \beta$) относно g и J.

Ортонормираната J-база $\{e_i, e_{\bar{i}}\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\bar{i} = n + i$, $e_{\bar{i}} = Je_i$ на $T_p\mathcal{M}$ относно g поражда $\{e'_i, e'_{\bar{i}}, e''_i, e''_{\bar{i}}\}$ – ортогонална база от изотропни вектори на $T_u(T\mathcal{M})$ относно $\widehat{g}$. Тогава базата $\{\xi_i, \xi_{\bar{i}}, \eta_i, \eta_{\bar{i}}\}$, където $\xi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e'_i + e''_i)$, $\xi_{\bar{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e'_{\bar{i}} + e''_{\bar{i}})$, $\eta_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e'_i - e''_i)$, $\eta_{\bar{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e'_{\bar{i}} - e''_{\bar{i}})$, е ортонормирана относно $\widehat{g}$. Освен това имаме $g(\xi_i, \xi_i) = -g(\xi_{\bar{i}}, \xi_{\bar{i}}) = -g(\eta_i, \eta_i) = g(\eta_{\bar{i}}, \eta_{\bar{i}}) = 1$, ако $g(e_i, e_i) = -g(e_{\bar{i}}, e_{\bar{i}}) = 1$ са в сила. Тогава са получени $J_1\xi_{\bar{i}} = \eta_i$, $J_1\eta_{\bar{i}} = \xi_i$, $J_2\eta_i = \xi_i$, $J_2\eta_{\bar{i}} = \xi_{\bar{i}}$, $J_3\xi_i = \xi_{\bar{i}}$, $J_3\eta_{\bar{i}} = \eta_i$, т.е. $\{\xi_i, \xi_{\bar{i}}, \eta_i, \eta_{\bar{i}}\}$ е адаптирана H-база. По този начин се оказва, че следните основни площадки в $T_u(T\mathcal{M})$ са специални относно H $(i \neq j)$:
a) J_α-*напълно реални площадки* $(\alpha = 1, 2, 3)$: $\{\xi_i, \xi_j\}$, $\{\xi_i, \xi_{\bar{j}}\}$, $\{\xi_i, \eta_j\}$, $\{\xi_i, \eta_{\bar{j}}\}$, $\{\xi_{\bar{i}}, \xi_{\bar{j}}\}$, $\{\xi_{\bar{i}}, \eta_j\}$, $\{\xi_{\bar{i}}, \eta_{\bar{j}}\}$, $\{\eta_i, \eta_j\}$, $\{\eta_i, \eta_{\bar{j}}\}$, $\{\eta_{\bar{i}}, \eta_{\bar{j}}\}$;
b) J_1-*холоморфна и* J_α-*напълно реални площадки* $(\alpha = 2, 3)$: $\{\xi_{\bar{i}}, \eta_i\}$, $\{\eta_{\bar{i}}, \xi_i\}$;
c) J_2-*холоморфна и* J_α-*напълно реални площадки* $(\alpha = 1, 3)$: $\{\eta_i, \xi_i\}$, $\{\eta_{\bar{i}}, \xi_{\bar{i}}\}$;
d) J_3-*холоморфна и* J_α-*напълно реални площадки* $(\alpha = 1, 2)$: $\{\xi_i, \xi_{\bar{i}}\}$, $\{\eta_{\bar{i}}, \eta_i\}$.

Секционните кривини $\widehat{k}$ на тези площадки и секционните кривини k_{ij}, $k_{i\bar{j}}$, $k_{\bar{i}\bar{j}}$ и $k_{i\bar{i}}$ на специалните основни площадки в $T_p\mathcal{M}$: J-напълно реални площадки $\{e_i, e_j\}$, $\{e_i, e_{\bar{j}}\}$, $\{e_{\bar{i}}, e_{\bar{j}}\}$ $(i \neq j)$ и J-холоморфна площадки $\{e_i, e_{\bar{i}}\}$ са свързани както следва: $\widehat{k}(\xi_i, \xi_j) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{ij} + k_{ij}$, $\widehat{k}(\xi_i, \xi_{\bar{j}}) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{i\bar{j}} + k_{i\bar{j}}$, $\widehat{k}(\xi_i, \eta_j) = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{ij}$, $\widehat{k}(\xi_i, \eta_{\bar{j}}) = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{i\bar{j}}$, $\widehat{k}(\xi_{\bar{i}}, \xi_{\bar{j}}) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{\bar{i}\bar{j}} + k_{\bar{i}\bar{j}}$, $\widehat{k}(\xi_{\bar{i}}, \eta_j) = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{\bar{i}j}$, $\widehat{k}(\xi_{\bar{i}}, \eta_{\bar{j}}) = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{\bar{i}\bar{j}}$, $\widehat{k}(\eta_i, \eta_j) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{ij} - k_{ij}$, $\widehat{k}(\eta_i, \eta_{\bar{j}}) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{i\bar{j}} - k_{i\bar{j}}$, $\widehat{k}(\eta_{\bar{i}}, \eta_{\bar{j}}) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{D}_u k\right)_{\bar{i}\bar{j}} - k_{\bar{i}\bar{j}}$.

Твърдение 11.14. Многообразието $(T\mathcal{M}, H, \widehat{G})$ за произволно почти норденово многообразие $(\mathcal{M}, J, g)$ има равни секционни кривини на J_1-холоморфните площадки и нулеви секционни кривини на J_2-холоморфните площадки.

Припомняме, че всяка h-сфера $\mathcal{S}^{2n}(z_0; a, b)$ в $\mathbb{R}^{2n+2}$, $n \geq 2$, дефинирана в §8.3.2, има нулеви холоморфни секционни кривини и постоянни напълно реални секционни кривини $\nu = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\nu^* = -\frac{b}{a^2+b^2}$ [35], тензор на кривина от вида $R = \nu(\pi_1 - \pi_2) + \nu^*\pi_3$ и следователно $\mathrm{D}R = 0$. Освен това имаме $\rho = 2(n-1)(\nu g - \nu^*\widetilde{g})$, $\rho^* = 2(n-1)(\nu^*\widetilde{g} + \nu g)$, $\tau = 4n(n-1)\nu$, $\tau^* = 4n(n-1)\nu^*$, където $\rho^* = \rho(R^*)$, $\tau^* = \tau(R^*)$ и поради вида на ρ, h-сферата се нарича *почти айнщайново* многообразие.

Разгледана е $(T\mathcal{S}, H, \widehat{G})$ на h-сферата $(\mathcal{S}, J, g)$, като негово базово келерово-норденово многообразие. Получено е, че $(T\mathcal{S}, J_1, \widehat{g}) \in \mathcal{W}_2(J_1)$, а за $\alpha = 2, 3$ имаме, че $(T\mathcal{S}, J_\alpha, \widehat{g}) \in (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_\alpha) \setminus (\mathcal{W}_i \oplus \mathcal{W}_j)(J_\alpha)$, където $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Пресметнати са секционните кривини $\widehat{k}$ на специалните относно H основни площадки в $T_u(T\mathcal{M})$.

Следствие 11.15. Многообразието $(T\mathcal{S}, H, \widehat{G})$ за произволна h-сфера с почти норденова структура $(\mathcal{S}, J, g)$ има постоянни секционни кривини на J_α-напълно реалните площадки и нулеви секционни кривини на J_α-холоморфните площадки $(\alpha = 1, 2, 3)$.

§12. Асоциирани тензори на Нейехаус върху многообразия с почти хиперкомплексни структури и ермитово-норденови метрики

В този параграф е въведен асоцииран тензор на Нейехаус за ендоморфизъм в допирателното разслоение на почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики. Изучени са връзките между шестте асоциирани тензори на Нейехаус на почти хиперкомплексна структура както и тяхното анулиране. Дадена е геометрична интерпретация на асоциираните тензори на Нейехаус за почти хиперкомплексна структура и ермитово-норденови метрики. Накрая е даден пример на 4-мерно многообразие от разглеждания тип с нулеви асоциирани тензори на Нейехаус.
Основните резултати в параграфа са публикувани в [91].

Анулирането на тензора на Нейехаус, като условие за интегруемост на многообразието, е отдавна известно [150]. Целта тук е въвеждането на подходящ тензор върху почти хиперкомплексно многообразие и установяване, че анулирането му е необходимо и достатъчно условие за съществуване на афинна свързаност с напълно кососиметрична торзия, запазваща почти хиперкомплексната структура и ермитово-норденовите метрики.

12.1. Асоциираните тензори на Нейехаус на ендоморфизми

Припомнени са дефинициите на тензор на Нейехаус за два ендоморфизма, за един ендоморфизъм и за почти контактна структура.

Дефиниция 12.1. Тензорът $\{J, K\}$ от тип (1,2) за (1,1)-тензори J и K, определен чрез $2\{J, K\}(x, y) = (JK + KJ)\{x, y\} + \{Jx, Ky\} - J\{Kx, y\} -$

$J\{x,Ky\}+\{Kx,Jy\}-K\{Jx,y\}-K\{x,Jy\}$, се нарича *асоцииран тензор на Нейехаус на два ендоморфизма върху псевдориманово многообразие.*

Очевидно той е симетричен относно ендоморфизмите и относно векторните полета. Ако един от ендоморфизмите е идентитетът, то асоциираният тензор на Нейехаус е нулев.

Използвани са следните означения на Фрьолихер-Нейехаус $(S\barwedge L)(x,y)=S(Lx,y)+S(x,Ly)$ и $(L\barwedge S)(x,y)=L(S(x,y))$, където L и S са съответно тензорни полета от тип (1,1) и (1,2) [33].

Лема 12.1. За произволни ендоморфизми J, K и L в $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ и свързаните с тях асоциирани тензори на Нейехаус е в сила следното свойство:
$\{J,KL\}+\{K,JL\}=\{J,K\}\barwedge L+J\barwedge\{K,L\}=\{J,K\}\barwedge L+K\barwedge\{J,L\}$.

12.2. Асоциираните тензори на Нейехаус на почти хиперкомплексната структура

Нека $(\mathcal{M},H)$, $H=(J_1,J_2,J_3)$ е почти хиперкомплексно многообразие.

12.2.1. Зависимости между асоциираните тензори на Нейехаус. За почти комплексните структури на H съществуват следните шест асоциирани тензори на Нейехаус $\{J_1,J_1\}$, $\{J_2,J_2\}$, $\{J_3,J_3\}$, $\{J_1,J_2\}$, $\{J_2,J_3\}$, $\{J_3,J_1\}$, които са изследвани в този параграф.

Лема 12.2. В сила са следните зависимости между асоциираните тензори на Нейехаус на почти хиперкомплексно многообразие: $\{J_3,J_1\}=\frac{1}{2}\{J_1,J_1\}\barwedge J_2+J_1\barwedge\{J_1,J_2\}$, $\{J_3,J_1\}=-\{J_1,J_2\}\barwedge J_1-J_1\barwedge\{J_1,J_2\}-J_2\barwedge\{J_1,J_1\}$, $J_2\barwedge\{J_1,J_1\}+\frac{1}{2}\{J_1,J_1\}\barwedge J_2+2J_1\barwedge\{J_1,J_2\}+\{J_1,J_2\}\barwedge J_1=0$, $\{J_2,J_3\}=-\frac{1}{2}\{J_2,J_2\}\barwedge J_1-J_2\barwedge\{J_1,J_2\}$, $\{J_2,J_3\}=J_1\barwedge\{J_2,J_2\}+\{J_1,J_2\}\barwedge J_2+J_2\barwedge\{J_1,J_2\}$, $J_1\barwedge\{J_2,J_2\}+\frac{1}{2}\{J_2,J_2\}\barwedge J_1+\{J_1,J_2\}\barwedge J_2+2J_2\barwedge\{J_1,J_2\}=0$, $\{J_3,J_3\}-\{J_1,J_1\}=\{J_3,J_1\}\barwedge J_2+J_3\barwedge\{J_1,J_2\}+J_1\barwedge\{J_2,J_3\}$, $\{J_3,J_3\}=\frac{1}{2}(\{J_1,J_1\}+\{J_3,J_1\}\barwedge J_2-J_2\barwedge\{J_3,J_1\}-\{J_2,J_3\}\barwedge J_1+J_1\barwedge\{J_2,J_3\})$, $\{J_1,J_1\}-\{J_2,J_2\}+\{J_3,J_1\}\barwedge J_2+J_2\barwedge\{J_3,J_1\}+2J_3\barwedge\{J_1,J_2\}+\{J_2,J_3\}\barwedge J_1+J_1\barwedge\{J_2,J_3\}=0$, $\{J_2,J_2\}\barwedge J_2=-2J_2\barwedge\{J_2,J_2\}$.

12.2.2. Анулиране на асоциираните тензори на Нейехаус. При доказването на следващата теорема са формулирани и доказани поредица леми (от **Лема 12.3** до **Лема 12.6**), разглеждащи отделни нейни случаи.

Теорема 12.7. Ако два от шестте асоциирани тензори на Нейехаус се анулират, то останалите също се анулират.

12.3. Естествени свързаности с напълно кососиметрична торзия върху почти хиперкомплексни многообразия с ермитово-норденови метрики

Нека g е псевдориманова метрика, която поражда ермитово-норденови метрики върху почти хиперкомплексното многообразие $(\mathcal{M},H)$. Тогава g

е ермитова за $\alpha = 1$, докато g е норденова метрика в случаите $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$.

Разгледано е многообразие $(\mathcal{M}, J_1, g)$, принадлежащо на класа $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4)(J_1)$ на кокалибрираните многообразия с ермитова метрика, определен чрез условието тензорът на Нейехаус $[J_1, J_1](x, y, z)$ да е 3-форма [44]. Нека многообразията $(\mathcal{M}, J_\alpha, g)$, $(\alpha = 2; 3)$ принадлежат на класа $\mathcal{W}_3(J_\alpha)$ на квазикелеровите многообразия с норденова метрика, определен чрез условието цикличната сума на F_α да е нулева [34].

Изразена е двойката тензори на Нейехаус във вида: $[J_\alpha, J_\alpha](x, y, z) = F_\alpha(J_\alpha x, y, z) + \varepsilon_\alpha F_\alpha(x, y, J_\alpha z) - F_\alpha(J_\alpha y, x, z) - \varepsilon_\alpha F_\alpha(y, x, J_\alpha z)$, $\{J_\alpha, J_\alpha\}(x, y, z) = F_\alpha(J_\alpha x, y, z) + \varepsilon_\alpha F_\alpha(x, y, J_\alpha z) + F_\alpha(J_\alpha y, x, z) + \varepsilon_\alpha F_\alpha(y, x, J_\alpha z)$.

Твърдение 12.8. За тензора на Нейехаус и асоциирания тензор на Нейехаус на $(\mathcal{M}, J_1, g)$ имаме: (i) $\{J_1, J_1\}(x, y, z) = [J_1, J_1](z, x, y) + [J_1, J_1](z, y, x)$; (ii) $\{J_1, J_1\}$ се анулира тогава и само тогава, когато $[J_1, J_1]$ е 3-форма.

Твърдение 12.9. Многообразията от класа $\mathcal{G}_1(J_1)$ се характеризират чрез условието $\{J_1, J_1\} = 0$.

За почти норденовите многообразия е известно от [34], че класът $\mathcal{W}_3(J_\alpha)$, $\alpha \in \{2, 3\}$ се характеризира чрез условието $\{J_\alpha, J_\alpha\} = 0$.

Теорема 12.10. Ако почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики принадлежи на два от класовете $\mathcal{G}_1(J_1)$, $\mathcal{W}_3(J_2)$, $\mathcal{W}_3(J_3)$ относно съответните почти комплексни структури, тогава то принадлежи и на третия клас.

За почти ермитовото многообразие $(\mathcal{M}, J_1, g)$, съгласно [31], съществува афинна свързаност D^1 с напълно кососиметрична торзия T_1 запазваща J_1 и g тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, J_1, g)$ принадлежи на $\mathcal{G}_1(J_1)$. В този случай D^1 е единствена и е определена чрез $T_1(x, y, z) = \mathrm{d}\widetilde{g}_1(J_1 x, J_1 y, J_1 z) + [J_1, J_1](x, y, z)$, където $\widetilde{g}_1$ е келеровата форма. Получено е следното изразяване на T_1 чрез F_1: $T_1(x, y, z) = F_1(x, y, J_1 z) - F_1(y, x, J_1 z) - F_1(J_1 z, x, y)$.

От друга страна, за случая $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$ имаме почти норденово многообразие $(\mathcal{M}, J_\alpha, g)$. Тогава, съгласно [112], съществува афинна свързаност D^α с напълно кососиметрична торзия T_α запазваща J_α и g тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, J_\alpha, g)$ принадлежи на $\mathcal{W}_3(J_\alpha)$. В този случай D^α е единствена и е определена чрез $T_\alpha(x, y, z) = -\frac{1}{2}\mathfrak{S}_{x,y,z} F_\alpha(x, y, J_\alpha z)$, $\alpha = 2, 3$.

Теорема 12.11. Нека $(\mathcal{M}, H, G)$ е почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики. Тогава то допуска запазваща структурата афинна свързаност D^* с напълно кососиметрична торзия тогава и само тогава, когато два от трите асоциирани тензори на Нейехаус $\{J_\alpha, J_\alpha\}$, $(\alpha =$

$1,2,3)$ се анулират и равенствата $T_1 = T_2 = T_3$ са в сила. Ако D^* съществува, тя е единствена и е определена чрез торзията ѝ $T^* = T_1 = T_2 = T_3$.

12.4. Пример за размерност 4

В [46] е разгледана свързана група на Ли $\mathcal{L}$ със съответна алгебра на Ли $\mathfrak{l}$, определена чрез следните условия за глобалната база на лявоинвариантните векторни полета $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$: $[x_1, x_3] = \lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_4$, $[x_2, x_4] = \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3$, $[x_3, x_2] = \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_4$, $[x_4, x_3] = \lambda_4 x_1 - \lambda_3 x_2$, $[x_4, x_1] = \lambda_1 x_2 + \lambda_4 x_3$, $[x_1, x_2] = \lambda_2 x_3 - \lambda_1 x_4$, където $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3,4)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$. Псевдоримановата метрика g е определена чрез равенствата $g(x_1, x_1) = g(x_2, x_2) = -g(x_3, x_3) = -g(x_4, x_4) = 1$, $g(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$. Въведена е почти хиперкомплексна структура (J_1, J_2, J_3) върху $\mathcal{L}$ както следва: $J_1 x_1 = x_2$, $J_1 x_4 = x_3$, $J_2 x_1 = x_3$, $J_2 x_2 = x_4$, $J_3 x_2 = x_3$, $J_3 x_4 = x_1$.

Тук е установено, че въведената структура върху $\mathcal{L}$ е почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики. Според [46] това многообразие принадлежи на класовете $\mathcal{W}_4(J_1)$, $\mathcal{W}_3(J_2)$, $\mathcal{W}_3(J_3)$ относно съответните почти комплексни структури. Имайки предвид разсъжденията в предните две части на параграфа, това е пример на 4-мерно многообразие с нулеви асоциирани тензори на Нейехаус за (J_1, J_2, J_3), за което съществуват афинни свързаности D^α $(\alpha = 1,2,3)$ с напълно кососиметрична торзия T_α, запазващи J_α и g.

Изчислени са основните компоненти на торзиите T_α. Получено е, че $T_1 = T_2 = T_3$. Следователно са изпълнени условията на Теорема 12.11 и тогава $(\mathcal{L}, H, G)$ допуска афинна свързаност D^*, запазваща структурата (H, G) и имаща напълно кососиметрична торзия T^*. Свързаността е единствена и е определена чрез T^*: $T^*_{123} = \lambda_2$, $T^*_{124} = -\lambda_1$, $T^*_{134} = \lambda_4$, $T^*_{234} = -\lambda_3$.

§13. Кватернионни келерови многообразия с ермитово-норденови метрики

В този параграф са разгледани почти хиперкомплексни многообразия с ермитово-норденови метрики и по-специално съответните кватернионни келерови многообразия. Намерени са някои необходими и достатъчни условия изучаваните многообразия да бъдат изотропни хиперкелерови и плоски. Доказано е, че кватернионните келерови многообразия с разглежданата метрична структура са айнщайнови за размерност поне 8. Определен е класът на нехиперкелеровите кватернионни келерови многообразия от разглеждания тип.

Основните резултати в параграфа са публикувани в [84].

13.1. Кватернионни келерови многообразия с ермитово-норденови метрики

Припомнено е, че един ендоморфизмът $Q = \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ върху почти хиперкомплексно многообразие $(\mathcal{M}, H)$ се нарича *кватернионна структура* върху $(\mathcal{M}, H)$ с допустима база H. Ако D е свързаността на Леви-Чивита на псевдоримановата метрика g върху $\mathcal{M}$, кватернионна структура с условието $\mathrm{D}\,Q = 0$ се нарича *кватернионна келерова структура* върху $(\mathcal{M}, H)$. Почти хиперкомплексно многообразие с кватернионна келерова структура е определено чрез $(\mathrm{D}_x\,J_\alpha)\,y = \omega_\gamma(x)J_\beta y - \omega_\beta(x)J_\gamma y$ за всички циклични пермутации (α, β, γ) на $(1, 2, 3)$, където ω_α са локални 1-форми, асоциирани на $H = (J_\alpha)$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ [127, 2].

Тук кватернионното келерово многообразие е снабдено със структура на ермитово-норденови метрики $G = (g, g_1, g_2, g_3)$ и е получено *кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики*. За него е установено, че квадратичната норма на $\mathrm{D}J_\alpha$ е $\|\mathrm{D}J_\alpha\|^2 = 4n\{\varepsilon_\beta\omega_\gamma(\omega_\gamma^\sharp) + \varepsilon_\gamma\omega_\beta(\omega_\beta^\sharp)\}$, където $\omega_1^\sharp$, $\omega_2^\sharp$, $\omega_3^\sharp$ са съответните вектори на ω_1, ω_2, ω_3 относно g.

Твърдение 13.1. Кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики е изотропно хиперкелерово многообразие с ермитово-норденови метрики тогава и само тогава, когато съответните вектори на 1-формите ω_1, ω_2 и ω_3 относно g са изотропни вектори относно g.

Получено е следното свойство на тензора на кривина R на D за всички циклични пермутации (α, β, γ) на $(1, 2, 3)$: $R(x, y, z, w) - \varepsilon_\alpha R(x, y, J_\alpha z, J_\alpha w) = \Psi_\beta(x, y)\widetilde{g}_\beta(z, w) + \Psi_\gamma(x, y)\widetilde{g}_\gamma(z, w)$, $\Psi_\beta(x, y) = \mathrm{d}\omega_\beta(x, y) + \omega_\gamma(x)\omega_\alpha(y) - \omega_\alpha(x)\omega_\gamma(y)$.

Лема 13.2. Локалните 1-форми ω_1, ω_2 и ω_3 удовлетворяват тъждествата: $\mathrm{d}\omega_2(x, y) = -\omega_3(x)\omega_1(y) + \omega_1(x)\omega_3(y)$, $\mathrm{d}\omega_3(x, y) = -\omega_1(x)\omega_2(y) + \omega_2(x)\omega_1(y)$.

Лема 13.3. Тензорът на кривина R на кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики е от келеров тип тогава и само тогава, когато $\Psi_1 = 0$.

Твърдение 13.4. Необходимото и достатъчно условие произволно кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики да бъде плоско е условието $\mathrm{d}\omega_1(x, y) = -\omega_2(x)\omega_3(y) + \omega_3(x)\omega_2(y)$.

Лема 13.5. Тензорът на Ричи ρ и 2-формата Ψ_1 имат следната зависимост: $\rho(x, y) = n\Psi_1(J_1 x, y)$.

Твърдение 13.6. Кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики е ричи-плоско тогава и само тогава, когато е плоско.

Теорема 13.7. Кватернионни келерови многообразия с ермитово-норденови метрики са айнщайнови за размерност $4n \geq 8$.

Твърдение 13.8. Кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики от размерност $4n \geq 8$ е скаларно плоско тогава и само тогава, когато е плоско.

Твърдение 13.9. Кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики от размерност $4n \geq 8$ е определено чрез локалните 1-форми, удовлетворяващи $\mathrm{d}\omega_1(x,y) = -\omega_2(x)\omega_3(y) + \omega_3(x)\omega_2(y) - \frac{\tau}{4n^2} g(J_1x, y)$ и равенствата в Лема 13.2.

13.2. Кватернионни келерови многообразия с ермитово-норденови метрики в класификацията на почти хиперкомплексните многообразия с ермитово-норденови метрики

Изразена е двойката тензори на Нейехаус чрез локалните 1-форми: $[J_\alpha, J_\alpha](x,y) = -[\omega_\gamma(x) + \omega_\beta(J_\alpha x)]J_\gamma y - [\omega_\beta(x) - \omega_\gamma(J_\alpha x)]J_\beta y + [\omega_\gamma(y) + \omega_\beta(J_\alpha y)]J_\gamma x + [\omega_\beta(y) - \omega_\gamma(J_\alpha y)]J_\beta x$, $\{J_\alpha, J_\alpha\}(x,y) = -[\omega_\gamma(x) + \omega_\beta(J_\alpha x)]J_\gamma y - [\omega_\beta(x) - \omega_\gamma(J_\alpha x)]J_\beta y - [\omega_\gamma(y) + \omega_\beta(J_\alpha y)]J_\gamma x - [\omega_\beta(y) - \omega_\gamma(J_\alpha y)]J_\beta x$.

Лема 13.10. Тензорите $[J_\alpha, J_\alpha]$ и $\{J_\alpha, J_\alpha\}$ се анулират тогава и само тогава, когато е в сила равенството $\omega_\gamma = -\omega_\beta \circ J_\alpha$.

Лема 13.11. Тензорите $[J_\alpha, J_\alpha]$ и $\{J_\alpha, J_\alpha\}$ се анулират тогава и само тогава, когато е в сила равенството $\omega_\alpha = \omega_\beta \circ J_\gamma = -\omega_\gamma \circ J_\beta$.

Тогава са получени $F_\alpha(x,y,z) = \omega_\gamma(x)g(J_\beta y, z) - \omega_\beta(x)g(J_\gamma y, z)$ и $\theta_\alpha(z) = -\varepsilon_\beta\omega_\gamma(J_\beta z) + \varepsilon_\gamma\omega_\beta(J_\gamma z)$.

Твърдение 13.12. Ако кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики $(\mathcal{M}, H, G)$ е интегруемо, то е хиперкелерово, т.е. $(\mathcal{M}, H, G) \in (\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4)(J_1) \cap (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)(J_2) \cap (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)(J_3) \Rightarrow (\mathcal{M}, H, G) \in \mathcal{K}$.

Твърдение 13.13. Ако почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики $(\mathcal{M}, H, G)$ и нулеви лиеви форми θ_2, θ_3 е кватернионно келерово, то е хиперкелерово, т.е. $(\mathcal{M}, H, G) \in (\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_2) \cap (\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3)(J_3) \Rightarrow (\mathcal{M}, H, G) \in \mathcal{K}$.

Твърдение 13.14. Нека $(\mathcal{M}, H, G)$ е почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики от класа $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ относно J_2 и J_3. Ако $(\mathcal{M}, H, G)$ е кватернионно келерово, тогава то е келерово многообразие относно J_1, т.е. $(\mathcal{M}, H, G) \in (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3)(J_2) \cap (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3)(J_3) \Rightarrow (\mathcal{M}, H, G) \in \mathcal{W}_0(J_1)$. Освен това имаме $(\mathrm{D}_x J_1)y = 0$, $(\mathrm{D}_x J_2)y = \omega_1(x)J_3y$, $\omega_1 = -\theta_2 \circ J_3$, $(\mathrm{D}_x J_3)y = -\omega_1(x)J_2y$, $\omega_1 = \theta_3 \circ J_2$.

Следствие 13.15. Нека $(\mathcal{M}, H, G)$ е почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики от класа $\mathcal{W}_3$ относно J_2 и J_3. Ако $(\mathcal{M}, H, G)$ е кватернионно келерово, то е хиперкелерово, т.е. $(\mathcal{M}, H, G) \in \mathcal{W}_3(J_2) \cap \mathcal{W}_3(J_3) \Rightarrow (\mathcal{M}, H, G) \in \mathcal{K}$.

Теорема 13.16. Нека кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики $(\mathcal{M}, H, G)$ е в някой от класовете $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ (и в частност $\mathcal{W}_0$, $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$), $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ и $\mathcal{W}_3$ относно J_2 и J_3. Тогава $(\mathcal{M}, H, G)$ е плоско хиперкелерово. Единственият клас (освен класът без условия за $\mathrm{D}J_2$ и $\mathrm{D}J_3$), където $(\mathcal{M}, H, G)$ не е плоско хиперкелерово, е $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$ и многообразията му са определени чрез изразите за $\mathrm{D}J_\alpha$ в Твърдение 13.14.

13.3. Нехиперкелерови кватернионни келерови многообразия с ермитово-норденови метрики

Тук е характеризирано многообразието, определено чрез равенствата в Твърдение 13.14. То е нехиперкелерово кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики. За него получаваме $\|\mathrm{D}J_2\|^2 = \|\mathrm{D}J_3\|^2 = -4n\,\omega_1(\omega_1^\sharp)$.

Следствие 13.17. Нека $(\mathcal{M}, H, G)$ е кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики, определено чрез локална 1-форма $\omega_1 = \theta_3 \circ J_2$. То е изотропно хиперкелерово тогава и само тогава, когато $\omega_1^\sharp$ е изотропен вектор относно g.

Твърдение 13.18. Нека ω_1 е локалната 1-форма на кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики от размерност $4n \geq 8$, определено чрез равенствата в Твърдение 13.14. Тогава ω_1 удовлетворява условието $\mathrm{d}\omega_1(x, y) = -\frac{\tau}{4n^2}\widetilde{g}_1(x, y)$.

Твърдение 13.19. Кватернионните келерови многообразия с ермитово-норденови метрики, определени чрез равенствата в Твърдение 13.14 с размерност $4n \geq 8$, са ричи-симетрични, т.е. $\mathrm{D}\rho = 0$.

Твърдение 13.20. Нека $(\mathcal{M}, H, G)$ е кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики, определено чрез ненулева локална 1-форма $\omega_1 = \theta_3 \circ J_2$. Тогава $(\mathcal{M}, H, G)$ е плоско нехиперкелерово тогава и само тогава, когато ω_1 е затворена.

Следствие 13.21. Нека $(\mathcal{M}, H, G)$ е кватернионно келерово многообразие с ермитово-норденови метрики, определено чрез ненулева локална 1-форма $\omega_1 = \theta_3 \circ J_2$. Тогава $(\mathcal{M}, H, G)$ е плоско нехиперкелерово тогава и само тогава, когато е в сила тъждеството $\mathrm{d}\theta_\alpha(x, y) + \mathrm{d}\theta_\alpha(J_1x, J_1y) - \mathrm{d}\theta_\alpha(J_2x, J_2y) - \mathrm{d}\theta_\alpha(J_3x, J_3y) = 0$ за $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$.

§14. Многообразия с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип

В този параграф е въведено многообразие с почти контактна 3-структура, която се състои от почти контактна метрична структура и две почти контактни B-метрични структури. Обсъдени са съответните класификации. Произведението на това многообразие *и реалната права е почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики. Доказано е, че въведеното многообразие от косимплектичен тип е плоско. Дадени са някои примери на изучаваните многообразия.*

Основните резултати в параграфа са публикувани в [92].

Целта ни тук е разглеждане на $(4n+3)$-мерно многообразие с почти контактна 3-структура и да въведем псевдориманова метрика върху него, която има друг вид съгласуваност с тройката почти контактни структури. Произведението на това многообразие от нов тип и реалната права е $(4n+4)$-мерно многообразие, което допуска почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики.

14.1. Почти контактни метрични многообразия

Върху нечетномерно гладко многообразие $\mathcal{M}$ са разгледани почти контактна структура $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1)$ и псевдориманова метрика g, които са съгласувани така: $g(\xi_1, \xi_1) = -\varepsilon_1$, $\eta_1(x) = -\varepsilon_1 g(\xi_1, x)$, $g(\varphi_1 x, \varphi_1 y) = g(x, y) + \varepsilon_1 \eta_1(x)\eta_1(y)$, където $\varepsilon_1 = 1$. Тогава $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$ се нарича *почти контактна метрична структура* върху $\mathcal{M}$.

Тъй като g е ермитова метрика относно почти комплексната структура $\varphi_1|_{\mathcal{H}_1}$ върху контактното разпределение $\mathcal{H}_1 = \ker(\eta_1)$, тя се разглежда като нечетномерен аналог на съответната псевдориманова ермитова метрика, или g е *от ермитов тип* върху нечетномерно гладко многообразие.

Класификация на почти контактните метрични многообразия е дадена в [4], направена относно тензора $F_1(x, y, z) = g\left(\left(\nabla_x \varphi_1\right) y, z\right)$, където ∇ е свързаността на Леви-Чивита за g, имащ свойствата $F_1(x, y, z) = -F_1(x, z, y) = -F_1(x, \varphi_1 y, \varphi_1 z) + F_1(x, \xi_1, z)\, \eta_1(y) + F_1(x, y, \xi_1)\, \eta_1(z)$. Получени са 12 основни класа, които са означени тук чрез $\mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 12)$. Формулирани са дефиниционните условия за $\dim \mathcal{M} = 4n + 3$ на $\mathcal{P}_i$ в нашия случай и е отбелязано, че класът $\mathcal{P}_0$ на косимплектичните метрични многообразия се задава чрез $F_1 = 0$ и се съдържа във всеки клас $\mathcal{P}_i$.

14.2. Почти контактни B-метрични многообразия

Тук многообразието $\mathcal{M}$ е снабдено с друга почти контактна структура $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2)$, като g е B-метрика относно нея. Тогава $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$ е *почти контактна B-метрична структура* върху $\mathcal{M}$, както в §4.

Използвана е отново класификацията на почти контактните B-метрични многообразия на Ганчев-Михова-Грибачев, както в §4. В този случай фундаменталният тензор е F_2: $F_2(x, y, z) = g\left(\left(\nabla_x \varphi_2\right) y, z\right)$ с основни свойства: $F_2(x, y, z) = F_2(x, z, y) = F_2(x, \varphi_2 y, \varphi_2 z) + F_2(x, \xi_2, z)\, \eta_2(y) + F_2(x, y, \xi_2)\, \eta_2(z)$. Формулирани са дефиниционните условия за $\dim \mathcal{M} = 4n + 3$ на 11-те основни класа $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 11)$ относно F_2 за $\dim \mathcal{M} = 4n + 3$.

14.3. Почти контактна 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип

Разгледано е многообразието $(\mathcal{M}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, което е с почти контактна 3-структура, дефинирана по стандартен начин [146, 62].

В тази част от параграфа е обсъдено съчетаването на съвместимите метрики и B-метриките в почти контактна 3-структура. Досега е изучаван случая на риманова метрика, която е съвместима с трите почти контактни структури, както с първата от тях.

Теорема 14.1. Нека $\mathcal{M}$ допуска почти контактна 3-структура $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, и псевдориманова метрика g. Ако една от трите структури $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ е почти контактна B-метрична структура, то другите две са почти контактна метрична структура и почти контактна B-метрична структура.

Тъй като всяка съвместима метрика и всяка B-метрика върху почти контактно многообразие $\mathcal{M}$ са метрики, съответни на ермитова метрика и норденова метрика върху $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ (или върху $\mathcal{H} = \ker(\eta)$), казваме, че съвместимата метрика и B-метриката са съответно метрика от ермитов тип и метрика от норденов тип върху $\mathcal{M}$.

Дефиниция 14.1. Псевдоримановата метрика g наричаме *метрика от ермитово-норденов тип* върху многообразие с почти контактна 3-структура $(\mathcal{M}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, ако са в сила тъждествата: $g(\varphi_\alpha x, \varphi_\alpha y) = \varepsilon_\alpha g(x, y) + \eta_\alpha(x)\eta_\alpha(y)$ за някоя циклична пермутация $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ на $(1, -1, -1)$. Тогава $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ наричаме *почти контактна 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип*.

За определеност разглеждаме случая $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, -1, -1)$.

В случая $\alpha = 1$ асоциираното тензорно поле от тип $(0, 2)$ е 2-форма $\widetilde{g}_1$, т.е. $\widetilde{g}_1(x, y) = g(\varphi_1 x, y)$. В другите два случая $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ е дефинирано $\widetilde{g}_\alpha(x, y) = g(\varphi_\alpha x, y) + \eta_\alpha(x)\eta_\alpha(y)$. Тогава $\widetilde{g}_2$ и $\widetilde{g}_3$ са също метрики от ермитово-норденов тип, които са наречени *асоциирани метрики* на g относно $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ съответно за $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$.

Направен е извод, че структурната група на многообразията с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип е $(\mathcal{GL}(n, \mathbb{H}) \cap \mathcal{O}(2n, 2n)) \times \mathcal{O}(2, 1)$, където $\mathcal{GL}(n, \mathbb{H})$ е групата на обратимите кватернионни $(n \times n)$-матрици, а $\mathcal{O}(p, q)$ е псевдоортогоналната група със сигнатура (p, q).

Фундаменталните тензори на многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип са трите $(0, 3)$-тензори, определени чрез $F_\alpha(x, y, z) = g((\nabla_x \varphi_\alpha)\, y, z)$, и с основни свойства: $F_\alpha(x, y, z) = -\varepsilon_\alpha F_\alpha(x, z, y) = -\varepsilon_\alpha F_\alpha(x, \varphi_\alpha y, \varphi_\alpha z) + F_\alpha(x, \xi_\alpha, z)\, \eta_\alpha(y) + F_\alpha(x, y, \xi_\alpha)\, \eta_\alpha(z)$.

Лиевите форми са дефинирани като следи на F_α относно g и произволна база $\{e_1, e_2, \ldots, e_{4n+2}, \xi_\alpha\}$ чрез равенствата: $\theta_\alpha(z) = g^{ij} F_\alpha(e_i, e_j, z)$, $\theta^*_\alpha(z) = g^{ij} F_\alpha(e_i, \varphi_\alpha e_j, z)$, $\omega_\alpha(z) = F_\alpha(\xi_\alpha, \xi_\alpha, z)$.

Най-простият случай на тези многообразия е когато структурите са ∇-паралелни или $F_\alpha = 0$. Тези структури са наречени *косимплектична 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип.*

14.4. Връзка с псевдоримановите многообразия, снабдени с почти комплексна или почти хиперкомплексна структура

Отбелязано е, че трите $(4n+2)$-мерни разпределения $\mathcal{H}_\alpha = \ker(\eta_\alpha)$, снабдени с почти комплексна структура $J_\alpha = \varphi_\alpha|_{\mathcal{H}_\alpha}$ и метрика $h_\alpha = g|_{\mathcal{H}_\alpha}$, където $(\cdot)|_{\mathcal{H}_\alpha}$ са рестрикциите върху $\mathcal{H}_\alpha$, като при $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ метриките h_α и асоциираните им $(0,2)$-тензори $\widetilde{h}_\alpha$ са норденови метрики, а за $\alpha = 1$ структурата (J_1, h_1) е почти ермитова псевдориманова структура с келерова форма $\Omega = -\widetilde{h}_1$. Освен това, $4n$-мерното разпределение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3$ има почти хиперкомплексна структура (J_1, J_2, J_3) с псевдориманова метрика $h = g|_{\mathcal{H}}$, която е ермитова относно J_1 и норденова относно J_2 и J_3.

Многообразията с почти контактна 3-структура и метрики на ермитово-норденов тип могат да се разглеждат като реални хиперповърхнини на почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики.

14.5. Кривинни свойства на многообразия с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип

Казваме, че кривиноподобен тензор L е *келеровоподобен тензор* върху многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип, когато е в сила: $L(x, y, z, w) = \varepsilon_\alpha L(x, y, \varphi_\alpha z, \varphi_\alpha w)$. Получени са и някои следствия на това свойство, според които, ако L е келеровоподобен тензор върху многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип, то L е келеровоподобен върху $(\mathcal{H}, J_\alpha = \varphi_\alpha|_H, h = g|_H)$ за съответното многообразие с почти хиперкомплексна структура и ермитово-норденови метрики. Тогава имаме

Твърдение 14.2. Върху многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип всеки келеровоподобен тензор е нулев.

Твърдение 14.3. Всяко многообразие с косимплектична 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип е плоско.

14.6. Примери на многообразия с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип

14.6.1. Реално векторно пространство с контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип. Нека V е реално векторно пространство с размерност $4n+3$ и (локална) база на V е означена чрез

$\{\frac{\partial}{\partial x^i}; \frac{\partial}{\partial y^i}; \frac{\partial}{\partial u^i}; \frac{\partial}{\partial v^i}; \frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial c}\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Снабдяваме V със стандартна контактна 3-структура.

Въведена е метрика g със сигнатура $(2n+2, 2n+1)$ чрез равенството: $g(z, z') = \sum_{i=1}^{n}(x^i x'^i + y^i y'^i - u^i u'^i - v^i v'^i) - aa' + bb' + cc'$ за векторите $z(x^i; y^i; u^i; v^i; a, b, c)$, $z'(x'^i; y'^i; u'^i; v'^i; a', b', c') \in V$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Проверено е, че g е от ермитово-норденов тип и $F_\alpha = 0$ за всяко α. Тогава имаме

Твърдение 14.4. Пространството $(V, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ е многообразие с косимплектична 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип.

14.6.2. Времеподобна сфера с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип. Тук се разглежда $(4n+4)$-мерно векторно пространство $\mathbb{R}^{4n+4} = \{(x^i; y^i; u^i; v^i) |\ x^i, y^i, u^i, v^i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}\}$, снабдено с почти хиперкомплексна структура (J_1, J_2, J_3), за която: $J_1 z(-y^i; x^i; v^i; -u^i)$, $J_2 z(-u^i; -v^i; x^i; y^i)$, $J_3 z(v^i; -u^i; y^i; -x^i)$ [47]. Въведена е метрика с неутрална сигнатура чрез $g(z, z') = \sum_{i=1}^{n+1}(x^i x'^i + y^i y'^i - u^i u'^i - v^i y'^i)$ за $z(x^i; y^i; u^i; v^i), z'(x'^i; y'^i; u'^i; v'^i) \in \mathbb{R}^{4n+4}$.

Дефинирана е единична времеподобна сфера $\mathcal{S}$: $g(z, z) = -1$ в $\mathbb{R}^{4n+4}$. Тогава z съвпада с единичното нормално векторно поле U на $T_p\mathcal{S}$ в $p \in \mathcal{S}$. Определени са $\xi_\alpha = J_\alpha U$ и $J_\alpha x = \varphi_\alpha x - \eta_\alpha(x) U$. Проверено е, че имаме почти контактната 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип.

След това е определен видът на F_α, получено е, че многообразието принадлежи на класовете $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{F}_4$ от съответните класификации и е доказано

Твърдение 14.5. Многообразието $(\mathcal{S}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ е: (i) сасакиево многообразие за $\alpha = 1$; (ii) сасакиевоподобно почти контактно комплексно риманово многообразие за $\alpha = 2, 3$.

§15. Асоциирани тензори на Нейехаус върху многообразия с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип

В този параграф е разгледано многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип. Въведени са асоциирани тензори на Нейехаус за изучаваните структури. Разгледано е тяхното анулиране и е дадена негова геометрична интерпретация като необходимо и достатъчно условие за съществуване на афинни свързаности с напълно кососиметрични торзии, запазващи структурата. Конструиран е пример на 7-мерно многообразие със свързаности от разглеждания тип.

Основните резултати в параграфа са публикувани в [93] *и* [94].

15.1. Асоциирани тензори на Нейехаус на почти контактна 3-структура с псевдориманова метрика

Дефиниция 15.1. Симетричният (1,2)-тензор $\widehat{N}_1$, определен чрез $\widehat{N}_1 = \{\varphi_1, \varphi_1\} - \xi_1 \otimes \mathfrak{L}_{\xi_1} g$, се нарича *асоцииран тензор на Нейехаус на почти контактната метрична структура* $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$.

Получени са изрази на N_1, $\widehat{N}_1$ и $\mathfrak{L}_{\xi_1} g$ чрез F_1.

В §4 е дефиниран асоцииран тензор на Нейехаус за почти контактната B-метрична структура, който за $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$ е означен чрез $\widehat{N}_2$ и е определен по следния начин: $\widehat{N}_2 = \{\varphi_2, \varphi_2\} + \xi_2 \otimes \mathfrak{L}_{\xi_2} g$.

Твърдение 15.1. За почти контактното B-метрично многообразие $(\mathcal{M}, \varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$ от анулирането на $\widehat{N}_2$ следва, че ξ_2 е килингово.

Нека $\mathcal{M}$ с $\dim \mathcal{M} = 4n + 3$ е снабдено с почти контактна 3-структура $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$. Разгледано е $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ с почти хиперкомплексна структура, определена чрез $J_\alpha X = J_\alpha(x, a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = (\varphi_\alpha x - a\xi_\alpha, \eta_\alpha(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$, където t е координатата върху $\mathbb{R}$, а a е C^∞ функция върху $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ [153, 12]. Освен това $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ е снабдено с метрика $h = g - \mathrm{d}t^2$, при което (J_α, h) поражда почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики.

Нека $(\mathcal{M}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ е многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип. Дефинирани са тензорите: $\widehat{N}^{(1)}_\alpha(x, y) = \{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\}(x, y) - \varepsilon_\alpha\left(\mathfrak{L}_{\xi_\alpha} g\right)(x, y)\,\xi_\alpha$, $\widehat{N}^{(2)}_\alpha(x, y) = -\varepsilon_\alpha\left(\mathfrak{L}_{\xi_\alpha} g\right)(\varphi_\alpha x, y) - \varepsilon_\alpha\left(\mathfrak{L}_{\xi_\alpha} g\right)(x, \varphi_\alpha y)$, $\widehat{N}^{(3)}_\alpha x = \{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\}(\varphi_\alpha x, \xi_\alpha) + \left(\mathfrak{L}_{\xi_\alpha} \eta_\alpha\right)(\varphi_\alpha x)\,\xi_\alpha + 2\eta_\alpha(x)\,\varphi_\alpha \nabla_{\xi_\alpha} \xi_\alpha$, $\widehat{N}^{(4)}_\alpha(x) = -\left(\mathfrak{L}_{\xi_\alpha} \eta_\alpha\right)(x)$.

Твърдение 15.2. Асоциираният тензор на Нейехаус $\{J_\alpha, J_\alpha\}$ на почти комплексната структура J_α върху $(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, J_\alpha, h)$ се анулира тогава и само тогава, когато тензорите $\widehat{N}^{(1)}_\alpha$, $\widehat{N}^{(2)}_\alpha$, $\widehat{N}^{(3)}_\alpha$, $\widehat{N}^{(4)}_\alpha$ за $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ се анулират.

Твърдение 15.3. За почти контактната структура $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ и псевдориманова метрика g от $\widehat{N}^{(1)}_\alpha = 0$ следва анулиране на $\widehat{N}^{(2)}_\alpha$, $\widehat{N}^{(3)}_\alpha$ и $\widehat{N}^{(4)}_\alpha$.

Твърдение 15.4. За почти контактната структура $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ с килингово ξ_α и псевдориманова g са в сила следните твърдения: (i) $\widehat{N}^{(1)}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\} = 0$; (ii) $\widehat{N}^{(2)}_\alpha = 0$; (iii) $\widehat{N}^{(3)}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \xi_\alpha \lrcorner \{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\} = 0$; (iv) $\widehat{N}^{(4)}_\alpha = 0$.

Дефиниция 15.2. Симетричните $(1, 2)$-тензори, определени чрез равенството $\widehat{N}_\alpha = \{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\} - \varepsilon_\alpha \xi_\alpha \otimes \mathfrak{L}_{\xi_\alpha} g$, наричаме *асоциирани тензори на Нейехаус върху* $(\mathcal{M}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$.

Теорема 15.5. Асоциираният тензор на Нейехаус $\{J_\alpha, J_\alpha\}$ на почти комплексната структура J_α върху $(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, J_\alpha, h)$ е нулев тогава и само тогава, когато асоциираният тензор на Нейехаус $\widehat{N}_\alpha$ на $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ се анулира.

Теорема 15.6. Ако два от асоциираните тензори на Нейехаус $\widehat{N}_\alpha$ се анулират, то третият също се анулира.

15.2. Естествени свързаности с напълно кососиметрична торзия върху многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип

Една афинна свързаност ∇^* се нарича *естествена свързаност за* $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$, ако запазва структурата, т.е. $\nabla^*\varphi_\alpha = \nabla^*\xi_\alpha = \nabla^*\eta_\alpha = \nabla^*g = 0$.

Теорема 15.7. За псевдоримановото многообразие с почти контактна метрична структура $(\mathcal{M}, \varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$ са еквивалентни твърденията: (i) Многообразието принадлежи на класа $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_4 \oplus \mathcal{P}_9 \oplus \mathcal{P}_{10} \oplus \mathcal{P}_{11}$, определен чрез $F_1(\varphi_1 x, y, z) + F_1(\varphi_1 y, x, z) + F_1(x, y, \varphi_1 z) + F_1(y, x, \varphi_1 z) = 0$. (ii) $\widehat{N}_1 = 0$ и ξ_1 е килингово; (iii) $\{\varphi_1, \varphi_1\} = 0$ и ξ_1 е килингово; (iv) N_1 е 3-форма и ξ_1 е килингово; (v) Съществува естествена свързаност ∇^1 с напълно кососиметрична торзия за $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$, ∇^1 е единствена и е определена чрез торзията ѝ $T_1(x, y, z) = F_1(x, y, \varphi_1 z) - F_1(y, x, \varphi_1 z) - F_1(\varphi_1 z, x, y) + 2F_1(x, \varphi_1 y, \xi_1)\eta_1(z)$.

Теорема 15.8. Следните твърдения за почти контактно B-метрично многообразие $(\mathcal{M}, \varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$ са еквивалентни: (i) Многообразието е от класа $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$, определен чрез условията: $\mathfrak{S}F_2 = 0$ и ξ_2 е килингово; (ii) $\widehat{N}_2 = 0$; (iii) $\{\varphi_2, \varphi_2\} = 0$ и ξ_2 е килингово; (iv) Съществува единствена естествена свързаност ∇^2 с напълно кососиметрична торзия, определена чрез торзията ѝ $T_2(x, y, z) = -\frac{1}{2}\mathfrak{S}_{x,y,z}\{F_2(x, y, \varphi_2 z) - 3\eta_2(x)F_2(y, \varphi_2 z, \xi_2)\}$.

Теорема 15.9. От съществуването на единствени естествени свързаности с напълно кососиметрична торзия за две от трите структури на почти контактната 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип следва съществуване на единствена естествена свързаност с напълно кососиметрична торзия за третата структура.

Следствие 15.10. Ако многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип принадлежи на два от следните три класа за съответната структура, тогава то принадлежи на останалия трети клас за съответната структура: $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_4 \oplus \mathcal{P}_9 \oplus \mathcal{P}_{10} \oplus \mathcal{P}_{11}$ за $\alpha = 1$; $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$ за $\alpha = 2$ и $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$ за $\alpha = 3$.

В случай на съвпадане на трите свързаности ∇^α казваме, че съществува *естествена свързаност* ∇^* *с напълно кососиметрична торзия* T^* *за почти контактната 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип.*

Теорема 15.11. Многообразието $(\mathcal{M}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ допуска свързаност ∇^* тогава и само тогава, когато $\widehat{N}_\alpha = 0$, ξ_1 е килингово и $T_1 = T_2 = T_3$. Ако ∇^* съществува, тя е единствена и е определена чрез $T^* = T_1 = T_2 = T_3$.

15.3. Група на Ли с размерност 7 като многообразие с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип

Нека $\mathcal{L}$ е 7-мерна реална свързана група на Ли, а $\mathfrak{l}$ е нейната алгебра на Ли с база $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Въведени са почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ по стандартен начин, като $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\xi_\alpha = e_{\alpha+4}$. После е разгледано $(\mathcal{L}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ с алгебра на Ли $\mathfrak{l}$, определена чрез $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = \lambda e_7$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Твърдение 15.12. Нека $(\mathcal{L}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ е групата на Ли $\mathcal{L}$ с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип, зависеща от $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогава това многообразие принадлежи на следните основни класове в съответните класификации: (i) $\mathcal{P}_{10}$ относно $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$; (ii) $\mathcal{F}_3$ относно $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$; (iii) $\mathcal{F}_7$ относно $(\varphi_3, \xi_3, \eta_3, g)$.

Тогава съществуват естествени свързаности ∇^α за съответната структура $(\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ върху $\mathcal{L}$. Пресметнати са основните компоненти на торзиите им T_α: $(T_1)_{127} = (T_1)_{347} = (T_3)_{127} = (T_3)_{347} = -\lambda$, $(T_2)_{127} = -(T_2)_{145} = -(T_2)_{235} = (T_2)_{347} = -\frac{1}{2}\lambda$. Очевидно ∇^1 и ∇^3 съвпадат, но ∇^2 се различава от тях. Условията за равенство на трите торзии в Теорема 15.11 не е изпълнено и не съществува ∇^* върху $(\mathcal{L}, \varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$.

⁂ ⁂ ⁂

Заключение

Приноси на дисертацията

Настоящият дисертационен труд съдържа изследванията на автора върху диференциалната геометрия на гладки многообразия снабдени с някои тензорни структури (почти комплексни структури, почти контактни структури, почти хиперкомплексни структури и почти комплексни 3-структури) и метрики от норденов тип.

Според автора, основните приноси на дисертацията са следните:

1. Въведена и изучавана е размяната на двете норденови метрики (основната и асоциираната ѝ метрика) върху почти комплексно многообразие и са намерени инвариантни и антиинвариантни геометрични обекти и характеристики при тази размяна.
2. Продължено е изучаването на основните естествени свързаности: B-свързаността, каноничната свързаност и KT-свързаността върху почти комплексни многообразия с норденова метрика. Характеризирани са всички основни класове на разглежданите многообразия относно торзиите на каноничната свързаност, тензора на Нейехаус и неговия асоцииран.
3. Въведен е асоцииран тензор на Нейехаус върху почти контактно многообразие с B-метрика, имащ важни геометрични характеристики. Освен това тези многообразия са класифицирани относно тензора на Нейехаус и неговия асоцииран.
4. Въведена и изучавана е φ-каноничната свързаност върху почти контактни многообразия с B-метрика и е намерена релацията между тази свързаност и другите две важни естествени свързаности върху тези многообразия – φB-свързаността и φKT-свързаността. Установено е, че торзията на φ-каноничната свързаност е инвариантна относно подгрупа от общите конформни трансформации на почти контактната B-метрична структура. По този начин основните класове на разглежданите многообразия са характеризирани по отношение на торзията на φ-каноничната свързаност.
5. Класифицирани са всички афинни свързаности върху едно почти контактно многообразие с B-метрика относно свойствата на техните торзии по отношение на структурата на многообразието. Характеризирани са

трите изучавани естествени свързаности по отношение на тази класификация.

6. Въведени и изучавани са двойка асоциирани афинни свързаности на Схаутен-ван Кампе, адаптирани към контактното разпределение и почти контактната B-метрична структура, породени от двойката асоциирани B-метрики и техните свързаности на Леви-Чивита. С помощта на конструираните несиметрични свързаности са характеризирани основните класове на почти контактните B-метрични многообразия.
7. Въведени и изучавани са сасакиевоподобни почти контактни комплексни риманови свързаности. В допълнение е представена канонична конструкция (наречена $\mathcal{S}^1$-разрешимо продължение) даваща такова многообразие от холоморфно комплексно риманово многообразие.
8. Изучавани са интегруеми хиперкомплексни структури с ермитово-норденови метрики върху 4-мерни групи на Ли чрез конструиране на петте вида, съответстващи на инвариантни хиперкомплексни структури с хиперермитова метрика.
9. Изучавано е допирателното разслоение на почти комплексно многообразие с норденова метрика и пълен лифт на норденовата метрика като почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики.
10. Въведени и изучавани са асоциирани тензори на Нейехаус на почти хиперкомплексно многообразие с ермитово-норденови метрики. Получена е геометрична интерпретация на анулирането на тези тензори като необходимо и достатъчно условие за съществуване на афинни свързаности с напълно кососиметрична торзия, запазващи структурата на многообразието.
11. Въведени и изучавани са кватернионни келерови многообразия, съответни на почти хиперкомплексни многообразия с ермитово-норденови метрики.
12. Въведени са многообразия с почти контактна 3-структура и метрики от ермитово-норденов тип, както и съответни асоциирани тензори на Нейехаус. Получена е геометрична интерпретация на анулирането на асоциираните тензори на Нейехаус като необходимо и достатъчно условие за съществуване на афинни свързаности с напълно кососиметрична торзия запазващи структурата на многообразието.
13. Конструирани и изучавани са различни явни примери на многообразия, снабдени с изучаваните структури: почти комплексна структура с норденова метрика, почти контактна структура с B-метрика, почти хиперкомплексна структура с ермитово-норденови метрики и почти контактна 3-структура с метрики от ермитово-норденов тип.

⁂ ⁂ ⁂

Публикации върху дисертацията

Основните резултати на настоящия дисертационен труд са публикувани в следните научни статии и препринти: [*]

1. [84] M. Manev. *Quaternionic Kähler manifolds with Hermitian and Norden metrics.* **Journal of Geometry**, vol. 103, no. 3 (2012), 519–530; ISSN:0047-2468, DOI:10.1007/s00022-012-0139-x, MCQ(2012):0.16, SJR(2012):0.278.
2. [99] M. Manev, M. Ivanova. *Canonical-type connection on almost contact manifolds with B-metric.* **Annals of Global Analysis and Geometry**, vol. 43, no. 4 (2013), 397–408; ISSN:0232-704X, DOI:10.1007/s10455-012-9351-z, IF(2013):0.794, SJR(2013):1.248.
3. [100] M. Manev, M. Ivanova. *A classification of the torsion tensors on almost contact manifolds with B-metric.* **Central European Journal of Mathematics**, vol. 12, no. 10 (2014), 1416–1432; ISSN:1895-1074, DOI:10.2478/s11533-014-0422-1, IF(2014):0.578, MCQ(2014):0.39, SJR(2014):0.610.
4. [86] M. Manev. *Hypercomplex structures with Hermitian-Norden metrics on four-dimensional Lie algebras.* **Journal of Geometry**, vol. 105, no. 1 (2014), 21–31; ISSN:0047-2468, DOI:10.1007/s00022-013-0188-9, MCQ(2014):0.26, SJR(2014):0.345.
5. [87] M. Manev. *Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure.* **Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences**, vol. 67, no. 3 (2014), 313–322; ISSN:1310-1331, IF(2014):0.284, SJR(2014):0.205.
6. [88] M. Manev. *On canonical-type connections on almost contact complex Riemannian manifolds.* **Filomat**, vol. 29, no. 3 (2015), 411–425; ISSN:0354-5180, DOI:10.2298/FIL1503411M, IF(2015):0.603, SJR(2015):0.487.
7. [90] M. Manev. *Pair of associated Schouten-van Kampen connections adapted to an almost contact B-metric structure.* **Filomat**, vol. 29, no. 10 (2015), 2437–2446; ISSN:0354-5180, IF(2015):0.603, SJR(2015):0.487.

[*]Номерът в квадратните скоби е от общия списък на библиографията.

8. [58] S. Ivanov, H. Manev, M. Manev. *Sasaki-like almost contact complex Riemannian manifolds.* **Journal of Geometry and Physics**, vol. 105 (2016), 136–148; ISSN:0393-0440, DOI:10.1016/j.geomphys.2016.05.009, IF(2015):0.752, SJR(2015):0.705.

9. [89] M. Manev. *Invariant tensors under the twin interchange of Norden metrics on almost complex manifolds.* **Results in Mathematics**, vol. 70, no. 1 (2016), 109–126; ISSN:1422-6383, DOI:10.1007/s00025-015-0464-0, IF(2015):0.768, MCQ(2015):0.43, SJR(2015):0.636.

10. [91] M. Manev. *Associated Nijenhuis tensors on manifolds with almost hypercomplex structures and metrics of Hermitian-Norden type.* **Results in Mathematics**, vol. 71, (2017), ISSN:1422-6383, DOI:10.1007/s00025-016-0624-x, IF(2015):0.768, MCQ(2015):0.43, SJR(2015):0.636.

11. [92] M. Manev. *Manifolds with almost contact 3-structure and metrics of Hermitian-Norden type.* arXiv:1506.04376.

12. [93] M. Manev. *Associated Nijenhuis tensors on manifolds with almost contact 3-structure and metrics of Hermitian-Norden type.* **Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences** (accepted), IF(2015): 0.233.

13. [94] M. Manev. *Natural connections with totally skew-symmetric torsion on manifolds with almost contact 3-structure and metrics of Hermitian-Norden type.* arXiv:1604.02039.

⁕ ⁕ ⁕

Декларация за оригиналност

от
проф. д-р Манчо Христов Манев
катедра „Алгебра и геометрия“
Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на научната степен „Доктор на науките“ в Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема: *Върху геометрията на многообразия с някои тензорни структури и метрики от норденов тип* са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

1.02.2017 Декларатор: /п/
Пловдив
(проф. д-р Манчо Манев)

⁂ ⁂ ⁂

Благодарности

При изследванията върху темата и подготовката на настоящия дисертационен труд, авторът е получил подкрепа от редица стойностни хора и поради това изразява благодарността си към тях.

На първо място авторът признава, че семейството му е в основата на благоприятните условия за научните му занимания.

Неоценима е оказаната помощ от неговите учители, консултанти и съавтори: Костадин Грибачев, Димитър Мекеров, Георги Ганчев, Стефан Иванов, Станчо Димиев и Коуей Секигава.

Освен това авторът е бил подпомогнат от неговите сътрудници: Галя Накова, Мирослава Иванова и Христо Манев.

Авторът също е благодарен на всички, които по един или друг начин са допринесли за реализирането на представения дисертационен труд.

⁂ ⁂ ⁂

Библиография

[1] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, *Classification of pseudo-Riemannian symmetric spaces of quaternionic Kähler type.* In: Lie groups and invariant theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. (2) 213, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 33–62.

[2] D. V. Alekseevsky, S. Marchiafava, *Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures.* Ann. Mat. Pura Appl. **CLXXI** (IV) (1996) 205–273.

[3] D. V. Alekseevsky, S. Marchiafava, M. Pontecorvo, *Compatible complex structures on almost quaternionic manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. **351** (3) (1999) 997–1014.

[4] V. Alexiev, G. Ganchev, *On the classification of almost contact metric manifolds.* In: Math. Educ. Math., Proc. 15th Spring Conf. UBM, (6-9 Apr. 1986, Sunny Beach, Bulgaria), Professor Marin Drinov Academic Publishing House, 1986, 155–161 (English translation: arXiv:1110.4297).

[5] C. Baikoussis, D. E. Blair, *On the geometry of the 7-sphere.* Results Math. **27** (1995) 5–16.

[6] M. L. Barberis, *Hypercomplex structures on four-dimensional Lie groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (4) (1997) 1043–1054.

[7] M. L. Barberis, I. Dotti, *Abelian complex structures on solvable Lie algebras.* J. Lie Theory **14** (1) (2004) 25–34.

[8] M. L. Barberis, I. Dotti, R. Miatello, *On certain locally homogeneous Clifford manifolds.* Ann. Glob. Anal. Geom. **13** (1995) 289–301.

[9] A. Bejancu, H. R. Farran, *Foliations and Geometric Structures.* Mathematics and Its Applications **580**, Springer, Dordrecht, 2006.

[10] O. Biquard, *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*, Astérisque, 2000, 265; English translation: Asymptotically Symmetric Einstein Metrics, SMF/AMS Texts and Monographs, American Mathematical Society, 2006, 13.

[11] J.-M. Bismut, *A local index theorem for non-Kähler manifolds.* Math. Ann. **284** (1989) 681–699.

[12] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds.* Progress in Mathematics **203**, Birkhäuser, Boston (2002).

[13] E. Bonan, *Sur les structures presque quaternioniques*, C. R. Acad. Sc. Paris **258** (1964) 792–795.

[14] E. Bonome, R. Castro, L.M. Hervella, *On an almost complex structure with Norden metric on the tangent bundle of an almost Hermitian manifold*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **33(81)** (1989) 309–318.

[15] A. Borisov, G. Ganchev, *Curvature properties of Kählerian manifolds with B-metric*, In: Math. Educ. Math., Proc. XIV Spring Conf. UBM, Sunny Beach, 1985, 220–226.

[16] A. Borowiec, M. Ferraris, M. Francaviglia, I. Volovich, *Almost complex and almost product Einstein manifolds from a variational principle.* J. Math. Phys. **40** (1999) 3446–3464.

[17] A. Borowiec, M. Francaviglia, I. Volovich, *Anti-Kählerian manifolds*, Differential Geom. Appl. **12** (2000) 281–289.

[18] C. P. Boyer, *A note on hyper-Hermitian four-manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1) (1988) 157–164.

[19] C. P. Boyer, K. Galicki, *3-Sasakian Manifolds.* In: Surveys in Differential Geometry VI. Essays on Einstein Manifolds (International Press, Boston, 1999) pp. 123–184.

[20] C. P. Boyer, K. Galicki, *Sasakian Geometry.* Oxford University Press, Oxford, 2008.

[21] C. P. Boyer, K. Galicki, B. M. Mann, *Hypercomplex structures from 3-Sasakian structures.* J. reine angew. Math. **501** (1998) 115–141.

[22] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie).* Ann. Ec. Norm. Sup. **42** (1925) 17–88, part II. English transl. of both parts by A. Magnon and A. Ashtekar, On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity, Bibliopolis, Napoli, 1986.

[23] R. Castro, L.M. Hervella, E. Garcia-Rio, *Some examples of almost complex manifolds with Norden metric*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989) 133–141.

[24] S. S. Chern, *Complex Manifolds Without Potential Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1979.

[25] G. Djelepov, I. Dokuzova, *Relations between two Riemannian connections in manifolds with an almost complex structure and Norden metric.* Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. **33** (2001) 31–34.

[26] P. Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle.* J. Reine Angew. Math. **210** (1962) 73–88.

[27] I. Dotti, A. Fino, *Hyper-Kahler with torsion structures invariant by nilpotent Lie groups*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) 1–12.

[28] S. Dragomir, M. Francaviglia, *On Norden metrics which are locally conformal to anti-Kählerian metrics*, Acta Appl. Math. **60** (2000) 135–155.

[29] C. Ehresmann, *Sur la théorie des espaces fibrés*, Coll. Intern. Top. Alg. Paris, CNRS (1947) 3–15 (Re-edited in Charles Ehresmann: Oeuvres complètes et commentèes, partie I, Amiens, 1984).

[30] A. Fino, G. Grantcharov, *Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy*, Adv. Math. **189** (2004) 439–450.

[31] T. Friedrich, S. Ivanov, *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory.* Asian J. Math. **6** (2002) 303–336.

[32] T. Friedrich, S. Ivanov, *Almost contact manifolds, connections with torsion, and parallel spinors.* J. Reine Angew. Math. **559** (2003) 217–236.

[33] A. Frölicher, A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms*, I, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, A **59** (1956) 338–359.

[34] G. Ganchev, A. Borisov, *Note on the almost complex manifolds with a Norden metric.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **39** (5) (1986) 31–34.

[35] G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova, *Holomorphic hypersurfaces of Kaehler manifolds with Norden metric.* Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. **23** (1985) 221–237.

[36] G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova, *B-connections and their conformal invariants on conformally Kaehler manifolds with B-metric.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **42(56)** (1987) 107–121.

[37] G. Ganchev, S. Ivanov, *Characteristic curvatures on complex Riemannian manifolds.* Riv. Mat. Univ. Parma (5) **1** (1992) 155–162.

[38] G. Ganchev, V. Mihova, *Canonical connection and the canonical conformal group on an almost complex manifold with B-metric*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. **81** (1) (1987) 195–206.

[39] G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev, *Almost contact manifolds with B-metric.* Math. Balkanica (N.S.) **7** (3-4) (1993) 261–276.

[40] E. García-Río, Y. Matsushita, *Isotropic Kähler structures on Engel 4-manifolds.* J. Geom. Phys. **33** (2000) 288–294.

[41] S. J. Gates, C. M. Hull, M. Roček, *Twisted multiplets and new supersymmetric non-linear σ-models.* Nuclear Phys. B **248** (1984) 157–186.

[42] P. Gauduchon, *Hermitian connections and Dirac operators*, Boll. Unione Mat. Ital. (7) **11** (2) (1997) 257–288.

[43] P. Gauduchon *Canonical connections for almost-hypercomplex structures.* In: Complex analysis and geometry, Trento, 1995, 123–136, Pitman Res. Notes in Math. Ser. 366, Longman, Harlow, 1997.

[44] A. Gray, L. M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants.* Ann. Mat. Pura Appl. **CXXIII** (IV) (1980) 35–58.

[45] K. Gribachev, G. Djelepov, D. Mekerov, *On some subclasses of generalized B-manifold*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **38** (1985) 437–440.

[46] K. Gribachev, M. Manev, *Almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds and a 4-dimensional Lie group with such structure.* J. Geom. **88** (1-2) (2008) 41–52.

[47] K. Gribachev, M. Manev, S. Dimiev, *On the almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds.* In: Trends in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa (World Sci. Publ., Singapore, River Edge, NJ, 2003) pp. 51–62.

[48] K. Gribachev, M. Manev, D. Mekerov, *A Lie group as a 4-dimensional quasi-Kähler manifold with Norden metric.* JP J. Geom. Topol. **6** (2006) 55–68.

[49] K. Gribachev, D. Mekerov, G. Djelepov, *Generalized B-manifolds.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **38** (3) (1985) 299–302.

[50] K. Gribachev, D. Mekerov, G. Djelepov, *On the geometry of almost B-manifolds.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **38** (1985) 563–566.

[51] D. Gribacheva, *Natural connections on Riemannian product manifolds.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **64** (6) (2011) 799–806.

[52] D. Gribacheva, D. Mekerov, *Canonical connection on a class of Riemannian almost product manifolds.* J. Geom. **102** (1-2) (2011) 53–71.

[53] D. Gribacheva, D. Mekerov, *Natural connections on conformal Riemannian P-manifolds.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **65** (5) (2012) 581–590.

[54] H. Hayden, *Subspaces of a space with torsion.* Proc. London Math. Soc. **34** (1934) 27–50.

[55] P. S. Howe, G. Papadopoulos, *Twistor spaces for hyper-Kähler manifolds with torsion.* Phys. Lett. B **379** (1996) 80–86.

[56] S. Ianuş, *Some almost product structures on manifolds with linear connection.* Kōdai Mathematical Seminar Reports **23** (1971) 305–310.

[57] P. Ivanov, S. Ivanov, *$SU(3)$-instantons and $G_2, Spin(7)$-heterotic string solitons.* Comm. Math. Phys. **259** (2005) 79–102.

[58] S. Ivanov, H. Manev, M. Manev, *Sasaki-like almost contact complex Riemannian manifolds.* J. Geom. Phys. **105** (2016) 136–148.

[59] S. Ivanov, G. Papadopoulos, *Vanishing theorems and string backgrounds.* Classical Quantum Gravity **18** (2001) 1089–1110.

[60] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1963.

[61] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. II. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.
[62] Y.-Y. Kuo, *On almost contact 3-structure*. Tôhoku Math. J. (2) **22** (1970) 325–332.
[63] Y.-Y. Kuo, S. Tachibana, *On the distribution appeared in contact 3-structure*. Taita J. Math. **2** (1970) 17–24.
[64] P. R. Law, *De Rham-Wu decomposition of holomorphic Riemannian manifolds*. J. Math. Phys. **43** (12) (2002) 6339–6342.
[65] C. LeBrun, *Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry*. Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1) (1983) 209–231.
[66] P. Libermann, *Sur les connexions hermitiennes*. C. R. Acad. Sci. Paris **239** (1954) 1579–1581.
[67] A. Lichnerowicz, *Un théorème sur les espaces homogènes complexes*. Arch. Math. **5** (1954) 207–215.
[68] A. Lichnerowicz, *Généralisation de la géométrie kählérienne globale*. Coll. de Géom. Diff. Louvain (1955) 99–122.
[69] A. Lichnerowicz, *Théorie Globale des Connections et des Groupes d'Homotopie*. Edizioni Cremonese, Roma, 1962.
[70] H. Manev, *On the structure tensors of almost contact B-metric manifolds*. Filomat **29** (3) (2015) 427–436.
[71] H. Manev, *Almost contact B-metric structures and the Bianchi classification of the three-dimensional Lie algebras*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. **102** (2015) 133–144.
[72] H. Manev, *Matrix Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **30** (3) (2015) 341–351.
[73] H. Manev, *Space-like and time-like hyperspheres in real pseudo-Riemannian 4-spaces with almost contact B-metric structures*, Novi Sad J. Math. **46** (1) (2016) 181–189.
[74] H. Manev, *Almost contact B-metric manifolds as extensions of a 2-dimensional space-form*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. **55** (1) (2016) 59–71.
[75] H. Manev, D. Mekerov, *Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds*, J. Geom. **106** (2015) 229–242.
[76] H. Manev, G. Nakova, *Slant null curves on normal almost contact B-metric 3-manifolds with parallel Reeb vector field* Results Math. (2016) doi:10.1007/s00025-016-0535-x.
[77] M. Manev, *Properties of curvature tensors on almost contact manifolds with B-metric*. In: Proc. Jubilee Sci. Session of Vassil Levsky Higher Mil. School, Veliko Tarnovo, vol. 27, Veliko Tarnovo, Bulgaria, 1993, pp. 221–227.
[78] M. Manev, *Contactly conformal transformations of general type of almost contact manifolds with B-metric. Applications*. Math. Balkanica (N.S.) **11** (3-4) (1997) 347–357.
[79] M. Manev, *On conformal geometry of almost contact manifolds with B-metric*. Doctoral Thesis, Plovdiv University, 1998, doi: 10.13140/2.1.2545.8887. (in Bulgarian)
[80] M. Manev, *Almost contact B-metric hypersurfaces of Kaehlerian manifolds with B-metric*. In: Perspectives of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics. (S. Dimiev and K. Sekigawa, eds.), pp. 159–170, World Sci. Publ., Singapore, 2001.
[81] M. Manev, *Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure*. In: Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields. (Y.

Matsushita, E. García-Río, H. Hashimoto, T. Koda and T. Oguro, eds.), pp. 170–185, World Sci. Publ., Singapore, 2005.

[82] M. Manev, *A connection with parallel torsion on almost hypercomplex manifolds with Hermitian and anti-Hermitian metrics.* J. Geom. Phys. **61** (1) (2011) 248–259.

[83] M. Manev, *Natural connection with totally skew-symmetric torsion on almost contact manifolds with B-metric.* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **9** (5) (2012) 1250044 (20 pages)

[84] M. Manev. *Quaternionic Kähler manifolds with Hermitian and Norden metrics.* Journal of Geomety **103** (3) (2012) 519–530.

[85] M. Manev, *Curvature properties on some classes of almost contact manifolds with B-metric.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **65** (5) (2012) 283–290.

[86] M. Manev. *Hypercomplex structures with Hermitian-Norden metrics on four-dimensional Lie algebras.* Journal of Geometry **105** (1) (2014) 21–31.

[87] M. Manev. *Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **67** (3) (2014) 313–322.

[88] M. Manev, *On canonical-type connections on almost contact complex Riemannian manifolds.* Filomat **29** (3) (2015) 411–425.

[89] M. Manev, *Invariant tensors under the twin interchange of Norden metrics on almost complex manifolds.* Results Math. **70** (1) (2016) 109–126.

[90] M. Manev. *Pair of associated Schouten-van Kampen connections adapted to an almost contact B-metric structure.* Filomat **29** (10) (2015) 2437–2446.

[91] M. Manev. *Associated Nijenhuis tensors on manifolds with almost hypercomplex structures and metrics of Hermitian-Norden type.* Results Math. **71** (2017), doi:10.1007/s00025-016-0624-x.

[92] M. Manev. *Manifolds with almost contact 3-structure and metrics of Hermitian-Norden type.* arXiv:1506.04376.

[93] M. Manev. *Associated Nijenhuis tensors on manifolds with almost contact 3-structure and metrics of Hermitian-Norden type.* arXiv:1604.02039 (part 1).

[94] M. Manev. *Natural connections with totally skew-symmetric torsion on manifolds with almost contact 3-structure and metrics of Hermitian-Norden type.* arXiv:1604.02039 (part 2)

[95] M. Manev, K. Gribachev, *Contactly conformal transformations of almost contact manifolds with B-metric.* Serdica Math. J. **19** (1993) 287–299.

[96] M. Manev, K. Gribachev, *Conformally invariant tensors on almost contact manifolds with B-metric.* Serdica Math. J. **20** (1994) 133–147.

[97] M. Manev, K. Gribachev, *A connection with parallel totally skew-symmetric torsion on a class of almost hypercomplex manifolds with Hermitian and anti-Hermitian metrics.* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **8** (1) (2011) 115–131.

[98] M. Manev, M. Ivanova, *A natural connection on some classes of almost contact manifolds with B-metric.* C. R. Acad. Bulg. Sci. **65** (4) (2012) 429–436.

[99] M. Manev, M. Ivanova, *Canonical-type connection on almost contact manifolds with B-metric.* Ann. Global Anal. Geom. **43** (4) (2013) 397–408.

[100] M. Manev, M. Ivanova, *A classification of the torsion tensors on almost contact manifolds with B-metric.* Cent. Eur. J. Math. **12** (10) (2014) 1416–1432.

[101] M. Manev, M. Ivanova, *Natural connections with torsion expressed by the metric tensors on almost contact manifolds with B-metric.* Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. **38** (3) (2011) 47–58.

[102] M. Manev, M. Ivanova. *Almost contact B-metric manifolds with curvature tensor of Kähler type.* Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. **39** (3) (2012) 57–69.

[103] M. Manev, K. Sekigawa, *Some four-dimensional almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds.* In: Contemporary Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics (S. Dimiev and K. Sekigawa, eds.), pp. 174–186, World Sci. Publ., 2005.

[104] M. Manev, M. Staikova, *On almost paracontact Riemannian manifolds of type* (n,n). J. Geom. **72** (2001) 108–114.

[105] Y. I. Manin, *Gauge field theory and complex geometry* (translated from Russian by N. Koblitz and J. R. King). In: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 289 (Springer-Verlag, Berlin, 1988) x+297 pp.

[106] Y. Matsushita, *On Euler characteristics of compact Einstein 4-manifolds with signature* $(++--)$. J. Math. Phys. **22** (1981) 979–982.

[107] Y. Matsushita, *Pseudo-Chern classes of an almost pseudo-Hermitian manifold.* Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987) 665–677.

[108] D. Mekerov, *On some classes of almost B-manifolds.* C. R. Acad. Bulgare Sci. **38** (1985) 559–561.

[109] D. Mekerov, *On the geometry of the B-connection on quasi-Kähler manifolds with Norden metric.* C. R. Acad. Bulg. Sci. **61** (2008) 1105–1110.

[110] D. Mekerov, *A connection with skew-symmetric torsion and Kähler curvature tensor on quasi-Kähler manifolds with Norden metric.* C. R. Acad. Bulg. Sci. **61** (2008) 1249–1256.

[111] D. Mekerov, *Canonical connection on quasi-Kähler manifolds with Norden metric.* J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math. **14** (2009) 73–86.

[112] D. Mekerov, *On the geometry of the connection with totally skew-symmetric torsion on almost complex manifolds with Norden metric.* C. R. Acad. Bulg. Sci. **63** (2010) 19–28.

[113] D. Mekerov, M. Manev, *On the geometry of quasi-Kähler manifolds with Norden metric.* Nihonkai Math. J. **16** (2) (2005) 89–93.

[114] D. Mekerov, M. Manev, K. Gribachev, *Quasi-Kähler manifolds with a pair of Norden metrics.* Results Math. **49** (1-2) (2006) 161–170.

[115] G. V. Nakova, K. I. Gribachev, *One classification of almost contact manifolds with B-metric.* In: Proc. Jubilee Sci. Session of Vassil Levsky Higher Mil. School, Veliko Tarnovo, vol. 27, Veliko Tarnovo, Bulgaria, 1993, pp. 208–214.

[116] G. Nakova, K. Gribachev, *Submanifolds of some almost contact manifolds with B-metric with codimension two, I.* Math. Balkanica **11** (1997) 255–267.

[117] G. Nakova, H. Manev, *Holomorphic submanifolds of some hypercomplex manifolds with Hermitian and Norden metrics.* C. R. Acad. Bulgare Sci. (in press), arXiv:1605.02286.

[118] G. Nakova, S. Zamkovoy, *Eleven classes of almost paracontact manifolds with semi-Riemannian metric of* $(n+1,n)$. In: Recent Progress in Differential Geometry and its Related Fields. Proc. 2nd Intern. Colloq. Differ. Geom. and Its Related Fields (Eds. T. Adachi, H. Hashimoto, M. Hristov) (6-10 Sept. 2010, Veliko Tarnovo, Bulgaria), World Sci. Publ., Singapore, 2011, 119–136.

[119] A. M. Naveira, *A classification of Riemannian almost-product manifolds.* Rend. Mat. Appl. (7) **3** (1983) 577–592.

[120] A. P. Norden, *On a class four-dimensional A-spaces*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **17** (1960) 145–157. (in Russian)

[121] A. P. Norden, *The structure of the connection on a manifold of lines in a non-Euclidean space.* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **127** (1972) 84–94. (in Russian)

[122] M. Obata, *Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure.* Jpn. J. Math. **26** (1956) 43–77.

[123] K. Olszak, *On the Bochner conformal curvature of Kähler-Norden manifolds.* Cent. Eur. J. Math. **3** (2) (2005) 309–317.

[124] Z. Olszak, *On almost complex structures with Norden metrics on tangent bundles*, Period. Math. Hung. **51** (2) (2005) 59–74.

[125] Z. Olszak, *The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para) contact metric structure.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **94(108)** (2013) 31–42.

[126] G. Ovando, *Invariant complex structures on solvable real Lie groups.* Manuscripta Math. **103** (2000) 19–30.

[127] S. M. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds.* Invent. Math. **67** (1982) 143–171.

[128] S. Salamon, *Riemannian Geometry and Holonomy Groups.* Pitman Research Notes in Mathematical Series, vol. 201, Longman Scientific & Technical, Harlow Essex, 1989.

[129] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures II.* Tôhoku Math. J. **13** (1961) 281–294.

[130] J. Schouten, E. R. van Kampen, *Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde.* Math. Ann. **103** (1930) 752–783.

[131] K. Sluka, *On the curvature of Kähler-Norden metric.* J. Geom. Phys. **54** (2) (2005) 131–145.

[132] J. E. Snow, *Invariant complex structures on four-dimensional solvable real Lie groups.* Manuscripta Math. **66** (1990) 397–412.

[133] A. F. Solov'ev, *On the curvature of the connection induced on a hyperdistribution in a Riemannian space.* Geom. Sb. **19** (1978) 12–23. (in Russian)

[134] A. Sommese, *Quaternionic manifolds.* Math. Ann. **212** (1975) 191–214.

[135] M. Staikova, K. Gribachev, *Canonical connections and their conformal invariants on Riemannian P-manifolds.* Serdica Math. J. **18** (1992) 150–161.

[136] A. Strominger, *Superstrings with torsion.* Nuclear Phys. B **274** (1986) 253–284.

[137] S. Tachibama, W. N. Yu, *On a Riemannian space admitting more than one Sasakian structure*, Tôhoku Math. J. **22** (1970) 536–540.

[138] T. Takahashi, *Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metric.* Tôhoku Math. J. **21** (1969) 271–290.

[139] N. Tanaka, *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections.* Jpn. J. Math. **20** (1976) 131–190.

[140] S. Tanno, *Variational problems on contact Riemannian manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989) 349–379.

[141] M. Teofilova, *Curvature properties of conformal Kähler manifolds with Norden metric.* Math. Educ. Math., Proc. 35th Spring Conf. UBM, Borovets (2006), 214–219.

[142] M. Teofilova, *Lie groups as four-dimensional conformal Kähler manifolds with Norden metric.* In: Topics in Contemporary Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Singapore (2006), 319–326.

[143] P. Tondeur, *Structure presque kählerienne naturelle sue le fibré des vecteurs covariants d'une variété riemannienne.* C. R. Acad. Sci. Paris, **254**, 1962, 407–408.

[144] A. Tralle, J. Oprea, *Symplectic manifolds with no Kähler structure.* Lecture Notes in Mathematics, 1661. Springer-Verlag, Berlin, 1997. viii+207 pp.

[145] F. Tricerri, L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds.* In: London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 83, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

[146] C. Udrişte, *Structures presque coquaternioniennes.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie **13** (1969) 487–507.

[147] V. Vishnevskii, *One more on a question on complex structures in line-geometries.* Trudi seminara vektornii and tensornii analysis Moscow **13** (1966) 467–492. (in Russian)

[148] S. M. Webster, *Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface.* J. Differential Geom. **13** (1978) 25–41.

[149] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* Pergamon Press, Oxford, 1965.

[150] K. Yano, M. Ako, *Intergrability conditions for almost quaternionic structures.* Hokkaido Math. J. **1** (1972) 63–86.

[151] K. Yano, S. Ishihara, *Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles.* J. Math. Mech. **16** (1967) 1015–1030.

[152] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles: Differential Geometry*, Pure and Applied Mathematics, 16, Marcel Dekker Inc., New York, 1973, 423 pp.

[153] K. Yano, S. Ishihara, M. Konishi, *Normality of almost contact 3-structure.* Tôhoku Math. J. **25** (1973) 167–175.

[154] K. Yano, S. Kobayashi, *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles. I. General theory.* J. Math. Soc. Japan **18** (1966) 194–210.

[155] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds.* Series in Pure Mathematics, 3, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.

⁂ ⁂ ⁂