

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д.м.н. Йохан Тодоров Давидов, ИМИ-БАН

на дисертационен труд
за присъждане на научната степен „доктор на науките“
в област на висше образование 4. *Природни науки, математика и информатика,*
професионално направление 4.5 *Математика,*
научна специалност *Геометрия и топология*

Автор: проф. д-р Манчо Христов Манев

Тема: Върху геометрията на многообразието с някои тензорни структури
и метрики от Норденов тип

Предмет на рецензиране:

Със заповед №РЗЗ-1291 от 05.04.2017 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема "Върху геометрията на многообразието с някои тензорни структури и метрики от Норденов тип" за придобиване на научната степен "доктор на науките" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност "Геометрия и топология". Автор на дисертационния труд е проф. д-р Манчо Христов Манев от катедра "Алгебра и геометрия" към Факултета по математика и информатика на Пловдивския университет "Паисий Хилендарски".

Представеният от проф. д-р Манчо Христов Манев комплект материали на хартиен и електронен носител е в съответствие с Правилника за развитие на академичния състав на ПУ и включва следните документи: молба до Ректора на ПУ за разкриване на процедура по защита на дисертационен труд, автобиография в европейски формат, копие от дипломата за ОНС "доктор", протокол от катедрен съвет за предварително обсъждане на дисертационния труд, дисертационен труд, автореферат, списък на научните публикации по темата на дисертацията, копия на научните публикации, декларация за оригиналност на резултатите в дисертационния труд и достоверност на приложените документи, справка за спазване на специфичните изисквания на ФМИ при ПУ.

Дисертантът е приложил 13 публикации по дисертационния труд. Представил е и други документи, свързани с неговата научна дейност.

Кратки биографични данни на дисертанта

Манчо Христов Манев е роден на 15.08.1966 г. През 1989 г. завършва ПУ, специалност "Математика и информатика". От 1990 г. до 1994 г. е редовен докторант в ПУ и през 1999 г. успешно защитава дисертация за ОНС "доктор". През 2003 г. е на шестмесечна следдокторска специализация в Университета на Ниигата, Япония. През 2003 г. е избран за доцент в ПУ, а през 2013 г. - за професор. От същата година е професор в Медицинския университет, Пловдив, където преди това е бил хонорирован преподавател и доцент.

Проф. Манев е бил заместник-декан на ФМИ, ПУ (2004-2011) и научен секретар на ФМИ (2011-2015). От 2011 г. той е ръководител на катедра "Алгебра и геометрия" на ИМИ, ПУ.

Обща характеристика на дисертационния труд.

Представената дисертация е с голям обем (207 страници постигнати резултати и 22 страници допълнителна информация и списък на литературата със 155 заглавия), поради което прегледът на нейното съдържание ще е по-дълъг от обичайното.

В параграфи 1- 3 на първа глава се изучават почти Норденови многообразия, т.е. гладки многообразия, снабдени с почти комплексна структура J и метрика g , които са съвместими в смисъл, че J е анти-изометрия относно g (такава метрика g по необходимост е с неутрална сигнатура (n, n)).

През 1986 г. Ганчев и Борисов предлагат класификация от тип Грей-Хервела на почти Норденовите многообразия, основана на свойства на ковариантната производна на почти комплексната структура J относно свързаността на Леви-Чивита. В параграф 1 на глава I дисертантът дава описание на класовете на Ганчев-Борисов в термините на тензора на Найенхьойс на J и така наречения асоцииран или симетричен тензор на Найенхьойс, в който вместо скобката на Ли се използва симетричната скобка $\{X, Y\} = D_X Y - D_Y X$, където D е свързаността на Леви-Чивита.

Всяко почти Норденово многообразие притежава още една метрика съвместима с почти комплексната структура. Тя се дефинира с равенството $\tilde{g}(X, Y) = g(JX, Y)$ и се нарича асоциирана метрика; нейната асоциирана метрика е метриката $-g$. Ганчев, Грибачев и Михова (1986 г.) дават описание на класовете \mathcal{W}_i , $i = 1, \dots, 8$, на Ганчев-Борисов в термините на разликата Φ между свързаностите на Леви Чивита \tilde{D} и D на метриките \tilde{g} и g . Тази разлика често се нарича потенциал на \tilde{D} относно D . Като използва това описание, авторът установява, че класовете \mathcal{W}_i за почти Норденовите структура (g, J) и (\tilde{g}, J) са едни и същи, с други думи класовете \mathcal{W}_i са инвариантни при замяна на метриката g с нейната асоциирана метрика \tilde{g} . Дисертантът намира и други инвариантни геометрични обекти, например свързаността $D_X^c Y = D_X Y + \frac{1}{2}\Phi(X, Y)$ и тензорът на Найенхьойс. Той показва още, че потенциалът Φ и симетричният тензор на Найенхьойс са анти-инвариантни.

Всяка четиримерна група на Ли притежава естествена лявоинвариантна почти Норденова структура. М. Теофилова (2006 г.) установява, че при специален избор, зависещ от 4 параметъра, на комутаторите на фиксиран базис на алгебрата на Ли почти Норденовата структура е от класа \mathcal{W}_1 на Ганчев-Борисов. Дисертантът установява редица други геометрични свойства на тази структура. Например, той намира условия върху четирите параметъра, при които тя е локално конформно Келерова, скаларно плоска или изотропно Келерова, пресмята тензора на кривината и прочие.

Ганчев и Михова (1987 г.) показват, че всяко почти Норденово многообразие притежава свързаност, относно която метриката и почти комплексната структура са паралелни и чиято торзия удовлетворява едно алгебрично твърдение, включващо почти комплексната структура. Чрез торзията на тази свързаност

Ганчев и Михова характеризират класовете \mathcal{W}_i . Дисертантът дава описание на тези класове чрез други твърдения за торзията, включващи двата тензора на Найенхьойс, формата на Ли на (g, J) и метриката g . Това е основният резултат в параграф 3.

В параграфи 4 - 8 на глава I се изследват почти контактни метрични многообразия, чиято метрика е от сигнатура $(n+1, n)$ и върху контактното разпределение е от Норденов тип относно $(1, 1)$ -тензора на почти контактната структура. Следвайки установената терминология, такива многообразия ще наричаме почти контактни с B -метрика. Разликата със стандартното понятие за почти контактна метрична многообразия, освен сигнатурата на метриката, е че при почти контактните многообразия с B -метрика условието за съвместимост на $(1, 1)$ -тензора φ с метриката g има вида $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + g(X, \xi)g(Y, \xi)$, където ξ е полето на Рийб.

Ганчев, Михова, Грибачев (1993 г.) предлагат класификация на почти контактните многообразия с B -метрика въз основа на свойства на ковариантната производна на $(1, 1)$ -тензора φ относно свързаността на Леви-Чивита на метриката g . Тяхната класификация съдържа 11 класа, които ще означаваме с \mathcal{F}_i , $i = 1, \dots, 11$. Класът на нормалните почти контактните многообразия с B -метрика (тензор на Найенхьойс нула) съвпада с директната сума на 5 класа \mathcal{F}_i - първите 6 без \mathcal{F}_3 . Дисертантът характеризира класа $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$ чрез анулирането на един тензор \widehat{N} , въведен от него, който е симетричен аналог на стандартния тензор на Найенхьойс като вместо скобката на Ли се използва симетричната скобка $\{X, Y\} = D_X Y - D_Y X$ и вместо диференциалът на 1- формата $\eta(X) = g(X, \xi)$, т.е. анти-симетризацията на ковариантната производна $D\eta$, се взема симетризацията на $D\eta$; тази симетризация всъщност е производната на Ли на метриката g в направление на полето на Рийб ξ . Едно следствие от получената характеристика на $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$ е, че свързаност с анти-симетрична торзия, относно която почти контактната структура е паралелна, съществува точно тогава, когато $\widehat{N} = 0$.

Авторът показва, че чрез тензора \widehat{N} и стандартния тензор на Найенхьойс може да се изрази торзията на дефинираната от него φ -канонична свързаност. Това е свързаност, която е естествена, т.е. относно която почти контактната метрична структура е паралелна и чиято торзия удовлетворява едно специално алгебрично твърдение. Това твърдение има малко сложен характер и на мен не са ми напълно ясни мотивите за неговото присъствие в дефиницията на φ -каноничната свързаност, освен посоченият от автора факт, че върху контактното разпределение φ -каноничната свързаност съвпада със споменатата вече свързаност на Ганчев-Михова за почти Норденови структури. Един естествен въпрос тук е доколко това свойство определя φ -каноничната свързаност. Дисертантът използва торзията на φ -каноничната свързаност, формата на Ли и *-формата на Ли, за да характеризира класовете \mathcal{F}_i на Ганчев-Михова-Грибачев. Той дава явно описание на изменението на φ -каноничната свързаност, когато почти контактната метрична структура е подложена на действието на дефинираните от него контактни конформни трансформации. Тези трансформации образуват група и за една нейна подгрупа авторът установява, че запазва класовете \mathcal{F}_i .

Структурната група на почти контактна многообразия с B -метрика дейс-

тва по естествен начин върху пространството от торзионно-подобните $(0, 3)$ -тензори. Като използва различни линейни оператори върху това пространство и негови подпространства, авторът намира ортогонално разлагане в директна сума от 15 инвариантни подпространства. Известен недостатък на тази част от дисертацията е, че авторът не е обяснил мотивите за въвеждането на тези подпространства; за няколко от тях те са ясни, но за повечето не са. За сравнение да припомним, че четирите основни класа на Грей-Хервела се дефинират чрез пространства от $(0, 3)$ -тензори, имащи симетриите на ковариантната производна на фундаменталната 2-форма на Келерово многообразие, като целта е да се получат интересни обобщения на условието за Келеровост. Ще отбележа още, че за съжаление, естественият въпрос дали някое от намерените инвариантни подпространства може допълнително да се разложи, т.е. дали разлагането е неприводимо, не е разгледан. Като приложение на полученото разлагане, дисертантът характеризира всеки един от класовете \mathcal{F}_i чрез условието торзията на φ -каноничната свързаност във всяка точка да принадлежи на някое от инвариантните подпространства или на тяхна директна сума.

Друга тема от първа глава на дисертацията са свързаностите на Схаутен-Ван Кампен върху почти контактното многообразие с B -метрика, определени от контактното разпределение и свързаностите на Леви-Чивита на B -метриката и нейната асоциирана метрика. Чрез тези свързаности Манев характеризира различни директни суми от класовете \mathcal{F}_i . По този начин, чрез принадлежност на многообразието към директни суми от \mathcal{F}_i , е изразено условието едната или другата от свързаностите на Схаутен-Ван Кампен да е естествена. Намерени са и различни връзки между кривините на двете свързаности.

В последния параграф на глава I се разглеждат многообразието, които са Норденова версия на Сасакиевите многообразия. Както е известно, Сасакиевите многообразия могат да се дефинират като контактни Риманови многообразия, за които естествената Ермитова структура върху Римановия конус на многообразието е паралелна относно свързаността на Леви-Чивита. Аналогичният метричен конус за почти контактното многообразие с B -метрика е почти Норденово многообразие. Ако почти комплексната структура върху този конус е паралелна, многообразието е наречено в дисертацията Сасаки-подобно. Всъщност дефиницията в нея е в термините на еквивалентното понятие за холморфно комплексно Риманово многообразие, което според мен е излишно и замъглява връзката с първите три части на първа глава, въпреки че тази връзка е спомената в началото на параграфа. Авторът характеризира условието за Сасаки-подобност на контактното многообразие с B -метрика в термините на ковариантната производна на неговия $(1, 1)$ -тензор, както и в термините на двата тензора на Найенхьойс. Той разглежда и редица примери на Сасаки-подобни многообразия и установява техни кривинни свойства.

Втора глава на дисертацията е посветена на хипер почти Ермит-Норденови комплексни и Ермит-Норденови контактни структури.

Една хипер почти Ермит-Норденова комплексна структура се състои от метрика върху гладко многообразие и три почти комплексни структури, удовлетворяващи комутационните тъждества на имагинерните кватерниони (т.е. хипер почти комплексна структура) и такива, че една от тях е изометрия (Ермитова),

а другите две са анти-изометрии (Норденови). В началото на втора глава дисертантът разглежда лявоинвариантни хипер Ермит-Норденови структури върху четиримерни групи на Ли. Според резултат на Барберис лявоинвариантни хипер комплексни структури съществуват върху 5 типа четиримерни групи на Ли. За всеки един от тях дисертантът дефинира конкретна хипер Ермит-Норденова структура и установява класа на Грей-Хервела на Ермитовата структура и класа на Ганчев-Борисов на Норденовите структури.

Както е известно от работа на Домбровски, тоталното пространство на допирателното разслоение на почти комплексно многообразие, снабдено със свързаност, притежава хипер почти комплексна структура. Дисертантът разглежда случая, когато комплексното многообразие притежава Норденова метрика и свързаността е тази на Леви-Чивита. Той забелязва, че пълното повдигане върху допирателното разслоение на метриката и неговата хипер почти комплексна структура задават хипер Ермит-Норденова структура. Авторът определя класа на Грей-Хервела на нейната почти Ермитова структура и класа на Ганчев-Борисов на нейните почти Норденови структури. Освен това намира условията върху многообразието за паралелност на всяка една от почти комплексните структури. Манев установява още, че холморфната секционна кривина на почти Ермитовата структура е постоянна, а на Норденовата е нула.

За всеки две почти комплексни структури върху дадено псевдо Риманово многообразие дисертантът въвежда симетричен аналог на техния тензор на Найенхойс като заменя скобката на Ли със симетричната скобка, дефинирана чрез свързаността на Леви-Чивита. Той показва, че ако симетричният тензор на Найенхойс на двойка почти комплексни структури от една хипер почти комплексна структура е нула, то и симетричният тензор на Найенхойс на другите двойки също е нула. Авторът показва още, че многообразие с хипер почти Ермит-Норденова структура допуска свързаност, запазваща структурата и имаща анти-симетрична торзия точно тогава, когато симетричните тензори на Найенхойс на почти комплексните структури се анулират и ковариантните производни на тези структури относно свързаността на Леви-Чивита удовлетворяват специални алгебрични твърдения; ако свързаност със споменатите свойства съществува, тя е единствена. Дисертантът илюстрира този резултат с пример върху четиримерна група на Ли.

Авторът използва понятието за хипер почти Ермит-Норденова структура, за да въведе аналог на понятието за кватернионно Келерово многообразие. Дефиницията, която той дава в началото на параграф 13.1 е всъщност дефиницията на така наречената специална или тривиална кватернионна структура, т.е. такава, която е определена от глобално дефинирани почти комплексни структури. Но изглежда, че авторът на някои места има предвид общата дефиниция, защото в Лема 13.2 той нарича формите $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, дефинирани чрез равенство (13.1), "локални", докато те, ако се следва буквално неговата дефиниция на кватернионна структура, са глобално дефинирани (тези форми са локални при общата дефиниция). От друга страна дисертантът формулира няколко твърдения, в които от принадлежност към класове на Грей-Хервела или Ганчев-Борисов на почти комплексна структура от кватернионно Келеровата, се прави заключение за тяхната Келеровост, така че в тези твърдения той неявно предполага, че ква-

тернионната структура е специална. Основният резултат в параграф 13 според мен е аналогът за кватернионно Келерово многообразие с Ермит-Норденова метрика на известната теорема, че кватернионно Келеровите многообразия с Ермитова метрика са Айнщайнови в размерност поне 8. Авторът показва също така, че многообразието е скаларно плоско точно тогава, когато е плоско.

В последните два параграфа на дисертацията се разглеждат почти контактни 3-структури с Ермит-Норденова метрика. Това са тройки от почти контактни метрични структури с една и съща метрика, две от които са от B -метричен тип, а третата е от Ермитов тип и които удовлетворяват условия за съгласуваност помежду си. Условията за метричния тип на почти контактните структури са естествени, понеже в дисертацията се разглеждат почти контактни структури с B -метрика и, както установява дисертантът, ако една от почти контактните структури в 3-структурата е от B -метричен тип, то още една е такава, а третата е от Ермитов тип. Авторът конструира примери на почти контактни 3-структури с Ермит-Норденова метрика върху векторно пространство и върху единичната времеподобна сфера от размерност $4n + 3$. След това той разглежда различни следствия от анулирането на симетричния тензор на Найенхьойс \hat{N} на някоя от почти контактните структури, съставляващи 3-структура върху многообразие M . Например, той установява, че симетричният тензор на Найенхьойс на коя да е от тях е нула точно тогава, когато е нула симетричният тензор на Найенхьойс на почти комплексната структура върху $M \times \mathbb{R}$, породена от съответната почти контактна структура. Анулирането на симетричния тензор на Найенхьойс на трите почти контактни структури също така е едно от необходимите и достатъчни условия, намерени от дисертанта, за съществуване на свързаност, относно която 3-структурата е паралелна и която има анти-симетрична торзия. Всъщност, както той показва, за анулирането на трите тензора е достатъчно два от тях да се анулират. Дисертацията завършва с пример на 3-структура върху седеммерна група на Ли.

Публикации по дисертацията.

Данните по-долу се отнасят до периода след конкурса за професор на дисертанта.

Както споменах, проф. Манев е представил списък и копия на 13 публикации по дисертацията. В рецензирани списания статиите с 11, от които 9 статии са в списания с импакт фактор (IF), а 2 - в списание с коефициент на цитиране (MCQ). От 9-те статии две са с един съавтор и една е с двама съавтори. Всички други статии са самостоятелни.

Резултатите в дисертацията са били докладвани на 18 научни конференции.

Работи на проф. Манев са цитирани 169 пъти в 50 публикации на други автори.

Лично участие на автора.

Без съмнение получените резултати в дисертацията са лично дело на автора. Две от съвместните му статии са в съавторство с Мирослава Иванова, която е била докторантка на дисертанта, поради което предполагам, че в тези статии водеща е била ролята на проф. Манев. Приемам, че в съвместната му статия със Стефан Иванов и Христо Манев приносът на съавторите е равностоен.

Автореферат.

Авторефератът е направен съгласно изискванията и правилно отразява резултатите в дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Документите и материалите, представени от проф. д-р Манчо Христов Манев, отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Публикациите по дисертацията напълно съответстват на специфичните изисквания на ФМИ, ПУ за придобиване на научната степен "доктор на науките".

Резултатите в дисертацията на проф. Манев се отнасят до актуални проблеми на диференциалната геометрия и го представят като изграден специалист в тази област.

Поради гореизложеното, давам своята положителна оценка за проведеното изследване в рецензираната дисертация и предлагам на научното жури да присъди на проф. д-р Манчо Христов Манев научната степен "доктор на науките" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност "Геометрия и топология".

15.05.2017 г.

Рецензент:

(проф. д.м.н. Йохан Давидов)