ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО "МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА"
КАТЕДРА "МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ"

МАГДАЛЕНА АСЕНОВА ВЕСЕЛИНОВА

Дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
в област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
докторска програма Диференциални уравнения

Научен ръководител: доц. д-р Христо Кискинов

Рецензенти:

Пловдив, 2016 г.

Дисертационният труд “Дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение” е написан на 121 страници. Библиографията включва 107 заглавия. Списъкът на авторските публикации се състои от 4 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на от часа в заседателната зала на новата сграда на ПУ “Паисий Хилендарски” пред научно жури в състав:

1.
2.
3.
4.
5.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330 всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Дисертацията се състои от увод, три глави, заключение, публикации по дисертационния труд и използвана литература.

Обемът на работата е 120 страници, от които 11 страници използвана литература. Списъкът на авторските публикации по темата се състои от 4 заглавия.

Увод

Теорията на дробното смятане (Theory of fractional calculus) е стара, колкото самото диференциално и интегрално смятане. През последните десетилетия тя е една от най-интензивно развиващите се области на приложната математика. Диференциалните уравнения от дробен ред са важна алтернатива на диференциалните уравнения с производни от цял ред предвид факта, че редица системи могат да бъдат моделирани адекватно само с използването на диференциални уравнения от дробен ред. Многобройните приложения във физиката и инженерните науки правят тази тематика актуална, за което може да се съди по големия брой публикации в специализираните списания (голяма част от тях с висок импакт-фактор), както и по сериозното количество монографии, отразяващи този клон от човешкото познание.

Целта на настоящата работа е изследването на системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение. Задачите, които трябва да се решат за постигане на тази цел в настоящата работа, представляват изследване на различни типове системи дробни диференциални уравнения за:

А. Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за неутрални системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение за случаите, когато дробните производни в системите са на Риман-Лиувил или Капуто, с рационално несъизмерими редове на диференциранията.

Б. Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за линейни системи дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция и с разпределени закъснения, като разпределените дробни производни са базирани на дробната производна на Капуто.

В. Намиране на достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни неутрални системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, в случаите, когато дробните производни в системите са на Риман-Лиувил или Капуто, с рационално несъизмерими редове на диференциранията.

Г. Установяване на експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни неутрални системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, в случаите, когато дробните производни в системите са на Риман-Лиувил или Капуто, с рационално несъизмерими редове на диференциранията.

Д. Намиране на достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни линейни системи дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция и с разпределени закъснения, като разпределените дробни производни са базирани на дробната производна на Капуто.

Е. Установяване на експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни линейни системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, в случаите на дробни производни на Риман-Ливул или Капуто, с рационално съизмерими или несъизмерими редове на диференциранията.

Работата се състои от увод, три глави, заключение, публикации по дисертационния труд и използвана литература.

Първата глава е обзорна. В нея е разгледано историческото развитие на теорията на дробното смятане. Представени са двете най-често използвани дефиниции за дробни производни, тези на Риман-Лиувил и Капуто, както и някои техни основни свойства, използвани в изложението по-долу. Разгледани са също някои специални функции, играещи важна роля в теорията на дробното смятане. Направен е обзор на съществуващите резултати, получени за дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент.

Във втора глава са разгледани системи с дробни производни в смисъл Риман-Лиувил. Първо са разгледани системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение от неутрален тип. За тях е дефинирана задачата на Коши и при естествени предположения е доказано, че тя има единствено решение дефинирано и непрекъснато в $\mathbb{R}_+$. В автономния случай е въведен аналог на характеристичното уравнение за функционално-диференциалните уравнения с целочислени производни и доказано, че ако всички корени на това характеристично уравнение имат отрицателни реални части, тогава разглежданата хомогенна неутрална линейна дробна диференциална система с разпределени закъснения е глобално асимптотично устойчива. Получените условия съвпадат с условията, които гарантират същия резултат в частния случай на системи с постоянни закъснения, като част от резултатите са нови и за този частен случай. Използвайки логаритмична норма, са получени достатъчни експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост на този тип системи. В случая, когато автономните линейни системи с дробни производни и разпределени закъснения не са от неутрален тип, са получени достатъчни експлицитни условия за глобалната им асимптотична устойчивост, базирани на устойчивостта на съответната автономните линейни системи с дробни производни без закъснения. Получените резултати са оптимизирани за случая на рационално съизмерими редове на диференциране.

В трета глава изследваните системи са с дробни производни в смисъл на Капуто. Разгледани са неутрални системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение и е дефинирана задача на Коши. Доказано е, че задачата на Коши има единствено решение дефинирано и непрекъснато в $\bar{\mathbb{R}}_+$. За автономния случай установяваме, че ако всички корени на въведения аналог на характеристично уравнение имат отрицателни реални части, тогава разглежданата хомогенна неутрална линейна дробна диференциална система с разпределени закъснения е глобално асимптотично устойчива. Установените условия съвпадат с условията, които гарантират същия резултат в частния случай на системи с постоянни закъснения. За същия тип системи, използвайки логаритмична норма са получени експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост. В случая когато системите не са от неутрален тип и производните са от разпределен ред относно дадена плътностна функция, е получена априорна оценка на решението на Коши за съответните линейни системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, като разпределените дробни производни в системите са базирани на дробната производна на Капуто. Доказано е, че задачата на Коши има единствено решение дефинирано и непрекъснато в $\bar{\mathbb{R}}_+$. В автономния случай са установени достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на нулевото решение на изследвания тип системи. В случая, когато автономните линейни системи с дробни производни и разпределени закъснения не са от неутрален тип, са получени достатъчни експлицитни условия за глобалната им асимптотична устойчивост, базирани на устойчивостта на съответните автономни линейни системи с дробни производни без закъснения. В случая на рационално съизмерими редове на диференциране, получените условия са оптимизирани.

Глава I.
Означения и исторически преглед на тематиката

1.1. Означения

В изложението по-долу ще използваме следните означения:

$\mathbb{N}$ е множеството от естествените числа;

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ е множеството на реалните числа, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty), \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$;

$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ е множеството на комплексните числа, $\mathbb{C}_+ = \{p \in \mathbb{C} | Rep > 0\}$,

$\bar{\mathbb{C}}_+ = \{p \in \mathbb{C} | Rep \geq 0\}$;

$L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ е линейното пространство на всички локално интегрируеми по Лебег функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

1.2. Логаритмична норма

Нека $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ е произволна квадратна матрица и I е единичната матрица. Нека $||x||_k = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k)^{\frac{1}{k}}, k \in \mathbb{N}$, $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$, $\quad ||A||_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||_k}, k \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 1.2.0.1. *([2], [19]) Функцията $\mu_k : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$, дефинирана с равенството*

$$\mu_k(A) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{||I + \varepsilon A||_k - 1}{\varepsilon},$$

където $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$, се нарича логаритмична норма (мярка на Лозински).

1.3. Исторически обзор на развитието на дробното смятане

Дробното смятане се занимава с изучаването на т.нар. оператори за диференциране и интегриране от дробен ред над реални или комплексни домейни и техните приложения. Счита се, че концепцията на дробното смятане произтича от въпрос, повдигнат през 1695 г. от маркиз Гийом Франсоа дьо Лопитал към Готфрид Вилхелм Лайбниц, който търси значението на означението на Лайбниц $\frac{d^n y}{dx^n}$ за производна от ред $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, когато $n = \frac{1}{2}$. В своя отговор от 30 септември 1695 г., Лайбниц пише на Лопитал следното: "Това очевидно е парадокс, от който един ден ще бъдат получени полезни последствия...".

Дробната производна е оператор, който обобщава обикновената производна, по такъв начин, че ако дробната производна е представена чрез оператора D^α, при $\alpha = 1$ тя съвпада с обикновения оператор за диференциране D.

Първата монография, посветена единствено и само на предмета на дробното смятане е книгата Олдъм и Спайнер [15]. Специално ще отбележим фундаменталните монографии на Кирякова [9], Подлубни [16] и Килбас, Сривастава и Трухило [8], чиито автори имат съществен принос за развитието на дробното смятане и дробните диференциални уравнения. Освен гореспоменатите фундаментални монографии ще отбележим и монографията на Дас [4], съдържаща редица приложения на дробното смятане.

1.4. Дробно смятане - определения и основни свойства

За всяко $a \in \mathbb{R}$ и $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, левият дробен интегрален оператор от ред $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ е дефиниран чрез

$$(D_{a+}^{-\alpha} f)(t) = (I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a,$$

$$(D_{0+}^{0} f)(t) = (I_{0+}^{0} f)(t) = f(t)$$

и съответната лява дробна производна на Риман-Лиувил чрез

$$_{RL}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int\limits_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds,$$

където $t > a, n = [\alpha] + 1, \alpha \notin \mathbb{N}$ and $n = \alpha, \alpha \in \mathbb{N}$.

Лявата дробна производна на Капуто $_{C}D^{\alpha}_{a+}$ е дефинирана чрез

$$_{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) =_{RL} D^{\alpha}_{a+}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)(t),$$

където $t > a, n = [\alpha] + 1, \alpha \notin \mathbb{N}$ и $n = \alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ (вижте Килбас [8], стр. 91).

Ако $f \in AC^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогава следващата формула дава директна дефиниция на лявата производна на Капуто:

$$_{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds.$$

Нека функцията $q(\alpha) : \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+, q \in L^{loc}_1(\bar{\mathbb{R}}_+, \bar{\mathbb{R}}_+)$ е локално ограничена за $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Дробната производна на Капуто от разпределен ред относно дадената плътностна функция $q(\alpha)$ за $\alpha \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$ е дефинирана чрез

$$_{C}D^{q(\alpha)}_{a+}f(t) = \int\limits_{n-1}^{n} q(\alpha)_{C}D^{\alpha}_{a+}f(t)d\alpha.$$

1.5. Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент

Повечето диференциални системи, използвани за описването на физични явления, са системи от целочислен ред. С развитието на дробното смятане е установено, че поведението на много системи може да бъде описано чрез използване на системи дробни диференциални уравнения. Струва си да се спомене, че много физични явления, имащи памет и генетични характеристики, могат да бъдат описани чрез използване на системи дробни диференциални уравнения.

Въпросът за устойчивост е от основен интерес във физични и биологични системи. Обаче някои от резултите за устойчивост се позовават на ограничение при моделирането на дробни диференциални уравнения: основната хипотеза се опира на съизмеримостта, т.е. производните от дробен ред трябва да бъдат числа кратни на минималния дробен ред. Благодарение на тази хипотеза са намерени някои резултати за устойчивост, базирайки се на теоремата на Матигнън [12]. За случая на несъизмерим дробен ред, може да се отнесем към Денг, Ли и Лу [5], Киан, Ли, Агарвал и Уонг [17]. Ли, Занг [11] правят подробен преглед на резултати за устойчивост на линейни и нелинейни дробни диференциални уравнения, и дробни диференциални уравнения със закъснение.

В инженерните науки много важни са системите от закъсняващ тип. Лазаревич и Спасик [10] и други разглеждат устойчивостта на системи дробни диференциални уравнения със закъснение въз основа на реални проблеми. Те изучават автономни и неавтономни системи дробни диференциални уравнения. За устойчивостта на закъсняващи системи можем да се отнесем към Денг, Ли и Лу [5], Чен и Мур [3], Хуонг и Ченг [7]. Денг, Ли и Лу [5], Киан, Ли, Агарвал и Уонг [17] и Ксионг, Зао и Жианг [24] изследват устойчивостта на дробни системи с многократни постоянни закъснения.

Първото систематично изследване на линейни диференциални уравнения и системи с разпределено закъснение (фундаментална теория, устойчивост, осцилационно поведение и т.н.) за целочислени производни е направено от Мишкис в неговата фундаментална монография [13]. Не ни е известно да са публикувани резултати за системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение.

Идеята за дробната производна от разпределен ред е на Капуто, но грубо казано произходът на тази идея е свързан с някои изследвания в реологията. Анализ на устойчивостта на линейни диференциални системи с производни на Капуто от разпределен ред относно неотрицателна плътностна функция е направен от Наджафи, Шейкхани и Ансари в [14] и Шейкхани,Ансари, Наджафи и Мехрдоуст в [18] от гледна точка на теория на управлението. Аминикхах, Шейкхани и Резазадех [1] изследват устойчивостта на линейни дробни системи от разпределен ред с многократни постоянни закъснения относно неотрицателна плътностна функция и доказват, че е асимптотично устойчива, тогава и само тогава, когато всички корени на съответното характеристичното уравнение имат отрицателни реални части.

Глава II.
Линейни системи с разпределени закъснения с дробни производни на Риман-Лиувил

2.1. Начална задача

2.1.1. Неутрални линейни дробни системи с разпределени закъснения

Разглеждаме неутралната система линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение, с рационално несъизмерими редове на диференциранията

$$
\begin{aligned}
&D_{0+}^{\alpha_k}[x_k(t) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta)d_\theta v_k^j(t,\theta)] = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta) + f_k(t), k = 1,2,\dots,n,
\end{aligned}
\tag{2.1.1.1}
$$

където $D_{0+}^{\alpha_k}$ означава ${}_{RL}D_{0+}^{\alpha_k}$ дробна производна на Риман-Лиувил, $\alpha_k \in (0,1)$ са произволни, $\tau \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+,\ U, V : \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, V(t,\theta) = \{v_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n$, $U(t,\theta) = \{v_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n$, $U(t,\cdot)$ и $V(t,\cdot)$ имат ограничена вариация върху $[-h,0]$, $h = max(\sigma,\tau), t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ и $f_k \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R}), k = 1,2,\dots,n$.

Въвеждаме следните означения:

$X(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T,\ \ |X(t)| = \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k(t)|,\ \ F(t) = (f_1(t),\dots,f_n(t))^T,$

$\alpha_m = \min(\alpha_1,...,\alpha_n),\ \ \alpha_M = \max(\alpha_1,...,\alpha_n),$

${}_{RL}D_{0+}^{\alpha}X(t) = ({}_{RL}D_{0+}^{\alpha_1}x_1(t),\dots,{}_{RL}D_{0+}^{\alpha_n}x_n(t))^T$ за всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$. За $W : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, W(t,\theta) = \{w_j^i(t,\theta)\}_{i,j=1}^n$ означаваме $|W(t,\theta)| = \sum\limits_{k,j=1}^{n}|w_k^j(t,\theta)|$.

С $\mathfrak{C}$ означаваме Банаховото пространство на началните векторни функции

$\mathfrak{C} = \{\Phi : [-h,0] \to \mathbb{R}^n\ \ |\ \ \Phi(t) = (\phi_1(t),\dots,\phi_n(t))^T,$

$\phi_k \in C([-h,0],\mathbb{R}), k=1,2,\ldots,n\}$ с норма $||\Phi|| = \sup\limits_{t\in[-\sigma,0]} \sum\limits_{k=1}^{n} |\phi_k(t)| = \sup\limits_{t\in[-\sigma,0]} |\Phi(t)|$ и с $BV[a,b]$ линейното пространство на функциите $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ с ограничена вариация върху $[a,b] \subset \mathbb{R}, a \le b$, където $Var_{[a,b]}W(\cdot) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} Var_{[a,b]}w_k^j(\cdot)$.

Казваме, че за ядрата $U, V : \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ условията (S) са изпълнени, ако:

(S1) Функциите $(t,\theta) \to U(t,\theta)$ и $(t,\theta) \to V(t,\theta)$ са измерими върху $(t,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и нормализирани така, че $U(t,\theta) = 0, V(t,\theta) = 0$ за $\theta \ge 0$, $U(t,\theta) = U(t,-\sigma)$ за $\theta \le -\sigma$ и $V(t,\theta) = V(t,-\tau)$ за $\theta \le -\tau$.

(S2) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ функциите $U(t,\theta)$ и $V(t,\theta)$ са непрекъснати от ляво в θ, съответно върху $(-\sigma,0)$ и $(-\tau,0)$.

(S3) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ функцията $U(t,\cdot) \in BV[-h,0]$ и съществува функция $z \in L_1^{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ такава, че $Var_{[-\sigma,0]}U(t,\cdot) \le z(t)$.

(S4) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ функцията $V(t,\cdot) \in BV[-h,0]$ е равномерно неатомична в нула (виж [6]), т.е. за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta(\varepsilon) > 0$ такова, че $Var_{[-\delta,0]}V(t,\cdot) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} Var_{[-\delta,0]}v_k^j(t,\cdot) < \varepsilon$.

(S5) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ следните релации са в сила:
$\int\limits_{-\sigma}^{0} |U(t,\theta) - U(t_*,\theta)|d\theta \to 0, \quad \int\limits_{-\tau}^{0} |V(t,\theta) - V(t_*,\theta)|d\theta \to 0$, когато $t_* \to t$.

(S6) Лебеговата декомпозиция на ядрото $V(t,\theta)$ за $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ и $\theta \in [-h,0]$ има вида:

$$V(t,\theta) = \tilde{\aleph}(t,\theta) + \int\limits_{-\tau}^{\theta} \tilde{B}(t,s)ds + \tilde{\Upsilon}(t,\theta), \qquad (2.1.1.2)$$

където $\tilde{\aleph}(t,\theta) = \{\tilde{a}_k^j(t)H(\theta+\tau_k^j(t))\}_{k,j=1}^n$, $\tilde{A}(t) = \{\tilde{a}_k^j(t)\}_{k,j=1}^n \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R}^n)$ е локално ограничена за $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$; $T(t) = \{\tau_k^j(t)\}_{k,j=1}^n \in C(\bar{\mathbb{R}}_+,\bar{\mathbb{R}}_+^{n\times n})$ и $H(t)$ е функцията на Хевисайд. За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ имаме, че $\int\limits_{-\sigma}^{\theta} \tilde{B}(t,s)ds = \{\int\limits_{-\sigma}^{\theta} \tilde{b}_k^j(t,s)ds\}_{k,j=1}^n \in AC(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, $\tilde{\Upsilon}(t,\theta) = \{\tilde{g}_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n \in C(\bar{\mathbb{R}}_+\times[-h,0],\mathbb{R}_+^n)$ и $\tilde{B}(t,\theta) = \{\tilde{b}_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n$ е локално ограничена.

(S7) Съществува число $\delta \in (0,\tau]$ такова, че за всяко $\theta_1,\theta_2 \in [0,\delta]$ и $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ имаме, че $\tilde{g}_k^j(t,\theta_1) = \tilde{g}_k^j(t,\theta_2), k,j = 1,2,\ldots,n$, т.е. $g_k^j(t,\theta)$ не зависи от θ за $\theta \in [0,\delta]$.

Разглеждаме задачата на Коши за (2.1.1.1) при начални условия

$$D_{0+}^{\alpha_k - 1} x_k(t) = \phi_k(t), t \in [-h, 0], \Phi \in \mathfrak{C},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1.1.3}$$

Нека $J \subset \mathbb{R}$ е произволен интервал и означим с $\ell(J, \mathbb{R}^n)$ реалното линейно пространство на всички функции, измерими по Лебег $G = (g_1, \ldots, g_n)^T : J \to \mathbb{R}^n$.

Дефиниция 2.1.1.1. *Казваме, че функция $G \in \ell(J, \mathbb{R}^n)$ е α-непрекъсната в $t_0 \in J$, ако съществува $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ такова, че функциите $\varphi_k(t) := |t - t_0|^{\alpha_k} g_k(t)$ са непрекъснати в $t_0 \in J, k = 1, 2, \ldots, n$.*

Нека $M \in \mathbb{R}_+$ и означим с C_M^α (C_∞^α) реалното линейно пространство на всички α-непрекъснати в нула функции $G : J_M \to \mathbb{R}^n$ ($G : J_\infty \to \mathbb{R}^n$), за които функциите $\varphi_k, k = 1, 2, \ldots, n$ в изложението, направено в Дефиниция 2.1.1.1, са непрекъснати върху $J_M = [-h, M]$ ($J_\infty = [-h, \infty)$).

Дефиниция 2.1.1.2. *Векторната функция $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$ е решение на началната задача* (2.1.1.1), (2.1.1.3) *в J_M (J_∞), ако $X \in C_M^\alpha$ (C_∞^α) удовлетворява системата* (2.1.1.1) *за $t \in (0, M]$ ($t \in \mathbb{R}_+$) и началнаното условие* (2.1.1.3) *за $t \in [-h, 0]$.*

Чрез Лема 3.2 в [8], началната задача (2.1.1.1), (2.1.1.3) се пренаписва

$$D_{0+}^\alpha \Big(X(t) - \int_{-\tau}^{0} [d_\theta V(t, \theta)] X(t + \theta)\Big) = \int_{-\sigma}^{0} [d_\theta U(t, \theta)] X(t + \theta) + F(t), \tag{2.1.1.4}$$

$$X_\alpha(t) = \Phi(t), t \in [-h, 0], \Phi \in \mathfrak{C}, \tag{2.1.1.5}$$

където $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $X_\alpha(t) = (\Gamma(\alpha_1) t^{1-\alpha_1} x_1(t), ..., \Gamma(\alpha_n) t^{1-\alpha_n} x_n(t))^T$.

Теорема 2.1.1.1. *Нека условията (S) са изпълнени, $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена и $\tau_k^j(0) > 0, k, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Тогава съществува $M > 0$ такова, че началната задача (2.1.1.1), (2.1.1.3) *има единствено решение $X \in C_M^\alpha$.*

Следствие 2.1.1.1. *Нека условията на Теорема 2.1.1.1 са в сила.*

Тогава условието $\phi_k(0) = 0, k = 1, 2, \ldots, n$ е необходимо началната задача (2.1.1.1), (2.1.1.3) *да има решение $X \in C(J_\infty, \mathbb{R}^n)$.*

Следствие 2.1.1.2. *Нека условията на Теорема 2.1.1.1 са в сила.*

Тогава началната задача (2.1.1.1), (2.1.1.3) има единствено решение $X \in C^{\alpha}_{\infty}$.

2.2. Устойчивост на автономни линейни дробни системи с разпределени закъснения

2.2.1. Устойчивост на автономни неутрални системи с разпределени закъснения

Разглеждаме автономната неутрална система

$$D^{\alpha_k}_{0+}[x_k(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta) dv^j_k(\theta)] = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta) du^j_k(\theta), k = 1, 2, \ldots, n, \quad (2.2.1.1)$$

където, както в (2.1.1.1), $D^{\alpha_k}_{0+}$ означава ${}_{RL}D^{\alpha_k}_{0+}$ дробна производна на Риман-Лиувил, $\alpha_k \in (0,1), \sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+, \tau \in \mathbb{R}_+, U, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, t \in \bar{\mathbb{R}}_+$, с начално условие (2.1.1.3).

Дефиниция 2.2.1.1. *Казваме, че системата* (2.2.1.1) *е:*

(a) *Устойчива, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta(\varepsilon) > 0$ и $t_* \in \bar{\mathbb{R}}_+$ такова, че за всяка начална функция $\Phi \in \mathfrak{C}$ с $||\Phi|| < \delta$ съответното решение $X(t)$ удовлетворява за $t \geq t_*$ неравенството $|X(t)| \leq \varepsilon$.*

(б) *Локално асимптотично устойчива, ако има $\Delta > 0$, такова че за всяка начална функция $\Phi \in \mathfrak{C}$ с $||\Phi|| < \Delta$ за съответното решение $X(t)$ имаме $\lim\limits_{t\to\infty} |X(t)| = 0$.*

(в) *Глобално асимптотично устойчива, ако за всяка начална функция $\Phi \in \mathfrak{C}$ за съответното решение $X(t)$ имаме, че $\lim\limits_{t\to\infty} |X(t)| = 0$.*

Лема 2.2.1.1. *Предполагаме, че $\alpha \in (0,1), \beta, t_0 \in \mathbb{R}_+$ са произволни числа и следните условия са в сила:*

1. *Функциите $a : \mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+, u : \mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ са α-непрекъснати от дясно в нула, локално интегрируеми и локално ограничени в $\mathbb{R}_+$.*

2. *Функцията $g \in C(\bar{\mathbb{R}}_+, \bar{\mathbb{R}}_+)$ е ненамаляваща.*

3. Неравенството $u(t) \leq a(t) + g(t) \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-1} u(s) ds$ *е в сила за* $t \geq t_0$.

Тогава за всяко $t \in \mathbb{R}_+$ *следното неравенство е в сила*

$$u_{t_0}(t) \leq a(t) + g(t) \int\limits_0^t [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1}] a(s) ds, \tag{2.2.1.2}$$

където $u_{t_0}(t) \equiv u(t)$ *за* $t \geq t_0$ *и* $u_{t_0}(t) \equiv 0$*, когато* $t \in [0, t_0)$.

Следствие 2.2.1.1. *Нека условията на Лема 2.2.1.1 са в сила и в допълнение функцията* $a(t)$ *е монотонно растяща или ограничена за* $t \geq t_0$*. Тогава за* $t \in \mathbb{R}_+$ *следните неравенства са в сила:*

(a) Ако функцията $a(t)$ *е монотонно растяща, тогава*

$$u_{t_0}(t) \leq a(t) E_\beta (g(t)\Gamma(\beta) t^\beta); \tag{2.2.1.3}$$

(б) Ако функцията $a(t)$ *е ограничена, тогава*

$$u_{t_0}(t) \leq \sup_{t \geq t_0} a(t) E_\beta (g(t)\Gamma(\beta) t^\beta), \tag{2.2.1.4}$$

където $E_\beta(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\beta k + 1}, z \in \mathbb{C}$ *е функцията на Митаг-Лефлер.*

Теорема 2.2.1.1. *Нека условията (S1)-(S4) и (S7) са в сила.*

Тогава за всяко решение $X(t)$ *на началната задача* (2.2.1.1), (2.1.1.3) *оценката*

$$\max(\max_{s \in [t_0, t]} |X(s)|, X_0) \leq \sup_{t \geq t_0} (a(t)) E_{\alpha_M} (C_0 \Gamma(\alpha_M) t^{\alpha_M}) \tag{2.2.1.5}$$

е в сила за $t \geq t_0$*, където* $t_0 \in (h, \infty)$ *е произволно,*
$X_0 = \max\limits_{s \in [t_0 - h, t_0]} |X(s)|, \; C_0 = Var_{[-h,0]} U(\cdot)(1 - Var_{[-h,0]} V(\cdot))^{-1}$ *и*

$$a(t) = [|\Phi(0)| \max(\max_{s \in [t_0, t]} (s^{\alpha_m - 1}, s^{\alpha_M - 1}), X_0) +$$

$$+ \frac{C_{t_0}^X}{\alpha_m} \max(\max_{s \in [t_0, t]} \sum_{k,j=1}^{n} |s^{\alpha_k} - (s - t_0)^{\alpha_k}|, X_0)](1 - Var_{[-h,0]} V(\cdot))^{-1}.$$

Нека означим $m_k^j(p) = \int\limits_{-\tau}^{0} e^{p\theta} dv_k^j(\theta)$ и $l_k^j(p) = \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_k^j(\theta)$.

Дефиниция 2.2.1.2. *За системата* (2.2.1.1) *матричната функция*

$$G(p) = \begin{pmatrix} p^{\alpha_1}[1 - m_1^1(p)] - l_1^1(p) & -[p^{\alpha_1} m_1^2(p) + l_1^2(p)] & \dots & -[p^{\alpha_1} m_1^n(p) + l_1^n(p)] \\ -[p^{\alpha_2} m_2^1(p) + l_2^1(p)] & p^{\alpha_2}[1 - m_2^2(p)] - l_2^2(p) & \dots & -[p^{\alpha_2} m_2^n(p) + l_2^n(p)] \\ \dots & & & \\ -[p^{\alpha_n} m_n^1(p) + l_n^1(p)] & -[p^{\alpha_n} m_n^2(p) + l_n^2(p)] & \dots & p^{\alpha_n}[1 - m_n^n(p)] - l_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{2.2.1.6}$$

наричаме характеристична матрица, а уравнението

$$det(G(p)) = 0 \tag{2.2.1.7}$$

характеристично уравнение.

Разглеждаме началната задача за автономния случай на система (2.1.1.1)

$$D_{0+}^{\alpha}(X(t) - \int\limits_{-\tau}^{0} [dV(\theta)]X(t+\theta)) = \int\limits_{-\sigma}^{0} [dU(\theta)]X(t+\theta)) \tag{2.2.1.8}$$

с началните условия (2.1.1.3).

Теорема 2.2.1.2. *Нека условията (S1)-(S4) и (S7) са в сила и всички корени на характеристичното уравнение* (2.2.1.7) *имат отрицателни реални части.*

Тогава системата (2.2.1.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

Нека предположим, че всички $\alpha_k \in (0,1)$ са рационални числа, т.е. $\alpha_k = \frac{l_k}{r_k}, l_k, r_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, n,$ Δ е най-малкото общо кратно на знаменателите на всички α_k и $\lambda = p^{\frac{1}{\Delta}}, p \in \mathbb{C}$. Нека означим $m_k^j(p) = \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\theta\lambda^{\Delta}} dv_k^j(\theta)$ и $l_k^j(p) = \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{\theta\lambda^{\Delta}} du_k^j(\theta)$. Тогава от (2.2.1.6) получаваме, че характеристичната матрица има вида

$$G(p) = \Gamma(\lambda^{\Delta}) = \begin{pmatrix} \lambda^{\alpha_1\Delta}[1 - m_1^1(p)] - l_1^1(p) & \dots & -l_1^n(p) \\ \dots & & \\ l_n^1(p) & \dots & \lambda^{\alpha_1\Delta}[1 - m_n^n] - l_n^n \end{pmatrix} \tag{2.2.1.9}$$

и от (2.2.1.7) следва, че характеристичното уравнение има вида

$$det(G(p)) = det(\Gamma(\lambda^{\Delta})) = 0. \tag{2.2.1.10}$$

Следствие 2.2.1.2. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условията (S1)-(S4) и (S7) са в сила.*

2. *Нека* $\alpha_k = \frac{l_k}{r_k}, l_k, r_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, n$ *и* Δ *е най-малкото общо кратно на знаменателите на всички* α_k.

3. За всички корени на уравнението (2.2.1.10) имаме, че $|arg(\lambda)| > \frac{\pi\Delta^{-1}}{2}$.

Тогава системата (2.2.1.1) е глобално асимптотично устойчива.

2.2.2. Експлицитни условия за уствойчивост на неутрални дробни системи с разпределени закъснения

Нека означим $m_j^k(p) = p\int\limits_{-\tau}^{0} e^{p\theta}dv_j^k(\theta) + p^{1-\alpha_j}\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta}du_j^k(\theta)$.

Дефиниция 2.2.2.1. *Матричната функция* $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} m_1^1(p) & \dots & m_1^n(p) \\ \dots & & \\ m_n^1(p) & \dots & m_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{2.2.2.1}$$

ще бъде наречена асоциирана характеристична матрица за системата (2.2.1.1).

Лема 2.2.2.1. *Нека условията (S1)-(S4) и (S7) са в сила.*

Комплексното число $p_* \in \mathbb{C}, p_* \neq 0$ *е собствена стойност на асоциираната матрична функция* $\Phi(p_*)$ *тогава и само тогава, когато* p_* *е корен на характеристичното уравнение* $det(G(p)) = 0$.

Лема 2.2.2.2. *Нека условията (S1)-(S4) и (S7) са в сила,* $Var_{[-h,0]}V(\cdot) < 1$ *и* $Var_{[-h,0]}U(\cdot) > 0$.

Тогава съществува $s^* \in \mathbb{R}_+$ *такова, че* $det(G(p)) \neq 0$ *за всяко* $p \in \mathbb{C}$ *с* $Re\ p > s^*$.

Разглеждаме помощното уравнение за $s \in \bar{\mathbb{R}}_+$

$$h(s) = \min(s^{\alpha_m}, s^{\alpha_M})(1 - Var_{[-h,0]}V(\cdot)) - Var_{[-h,0]}U(\cdot) = 0. \tag{2.2.2.2}$$

Лема 2.2.2.3. *Нека условията на Лема 2.2.2.2 са изпълнени.*

Тогава съществува $s^* \in \mathbb{R}_+$ *такова, че за всяко* $p \in \bar{\mathbb{C}}_+$ *с* $|Im\ p| > s^*$ *имаме* $det(G(p)) \neq 0$, *където точката* s^* *е единственият корен на уравнение (2.2.2.2).*

Забележка 2.2.2.1. *От Лема 2.2.2.2 и Лема 2.2.2.3 следва, че всички корени на характеристичното уравнение* $det(G(p)) = 0$ *с неотрицателни реални части при-*

надлежат на правоъгълника

$$\Omega = \{p = \gamma + i\omega \in \mathbb{C} \ \mid \ 0 \le \gamma \le s^*, \ \ 0 \le |\omega| \le s^*\},$$

където точката s^* е единственият корен на уравнението (2.2.2.2).Следователно характеристичното уравнение $det(G(p)) = 0$ има само краен брой корени в $\bar{\mathbb{C}}_+$.

Теорема 2.2.2.1. *Нека условията (S1)-(S4) и (S7) са в сила, $\mu(\Phi(p)) < 0$ за всяко $p \in \Omega \setminus \{0\}$ и $det(G(0)) > 0$.*

Тогава системата (2.2.1.1) е глобално асимптотично устойчива.

2.2.3. Експлицитни условия за устойчивост на автономни линейни системи с разпределени закъснения

Разглеждаме автономната линейна система

$$D_{0+}^{\alpha_k} x_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta) du_k^j(\theta), k = 1, 2, \dots, n, \tag{2.2.3.1}$$

където $D_{0+}^{\alpha_k}$ означава ${}_{RL}D_{0+}^{\alpha_k}$ (дробна производна на Риман-Лиувил), $\alpha_k \in (0,1), \sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$ и $n \ge 2$.

Казваме, че за ядрото $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ условията (P) са изпълнени, ако е в сила:

(P1) Функцията $U \in BV[\sigma, 0]$ и е нормализирана, така че $U(0) = 0, U(\theta) = 0$ за $\theta \ge 0$, $U(\theta) = U(-\sigma)$ за $\theta \le -\sigma$.

(P2) Ядрото $U(\theta)$ е непрекъснато от ляво в θ on $(\sigma, 0)$.

(P3) Лебеговата декомпозиция за ядрото $U(\theta)$ за $\theta \in [-\sigma, 0]$ има вида: $U(\theta) = \aleph(\theta) + \int_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds + \Im(\theta)$, където $\aleph(\theta) = \{a_k^j H(\theta + \sigma_k^j)\}_{k,j=1}^n, \sigma_k^j \in [0, \sigma], 1 \le j, k \le n, A = \{a_k^j\}_{k,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $H(t)$ е функцията на Хевисайд. $\int_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds = \{\int_{-\sigma}^{\theta} b_k^j(s)ds\}_{k,j=1}^n \in AC([-h, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$ и $\Im(\theta) = \{g_k^j(\theta)\}_{k,j=1}^n \in C([-h, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$.

Дефиниция 2.2.3.1. *[20] Матричната функция*

$$G(p) = \begin{pmatrix} p^{\alpha_1} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_1^1(\theta) & - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_1^2(\theta) & \dots & - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_1^n(\theta) \\ - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_2^1(\theta) & p^{\alpha_2} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_2^2(\theta) & \dots & - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_2^n(\theta) \\ \dots & & & \\ - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_n^1(\theta) & - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_n^2(\theta) & \dots & p^{\alpha_n} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_n^n(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.2.3.2}$$

наричаме характеристична матрица за системата (2.2.3.1), *а уравнението*

$$det(G(p)) = 0 \tag{2.2.3.3}$$

характеристично уравнение.

Лема 2.2.3.1. *Нека условията (P) са в сила и* $Var_{[-h,0]}U(\cdot) > 0$.

Тогава всички корени на характеристичното уравнение (2.2.3.3) *с неотрицателни реални части принадлежат на правоъгълника*

$$\Omega = \{p = \gamma + i\omega \in \mathbb{C} | 0 \le \gamma \le s^*, 0 \le |\omega| \le s^*\},$$

където $s^* \in \mathbb{R}$ *е единственият корен в* $\mathbb{R}_+$ *на уравнението*

$$h(s) = min(s^{\alpha_m}, s^{\alpha_M}) - Var_{[-h,0]}U(\cdot) = 0 \tag{2.2.3.4}$$

Разглеждаме частния случай, когато в условие (P3) имаме $\int\limits_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds \equiv 0, \Im(\theta) \equiv 0$ за $\theta \in [-\sigma, 0]$. Тогава от (2.2.3.2) следва, че характеристичната матрица има вида

$$G_J(p) = \begin{pmatrix} p^{\alpha_1} - a_1^1 e^{-p\sigma_1^1} & -a_1^2 e^{-p\sigma_1^2} & \dots & -a_1^n e^{-p\sigma_1^n} \\ a_2^1 e^{-p\sigma_2^1} & p^{\alpha_2} - a_2^2 e^{-p\sigma_2^2} & \dots & -a_2^n e^{-p\sigma_2^n} \\ \dots & & & \\ a_n^1 e^{-p\sigma_n^1} & -a_n^2 e^{-p\sigma_n^2} & \dots & p^{\alpha_n} - a_n^n e^{-p\sigma_n^n} \end{pmatrix}, \tag{2.2.3.5}$$

т.е. $G_J(p) = \{c_k^j(p)\}_{k,j=1}^n$, където $c_k^j(p) = p^{\alpha_k} - a_k^k e^{-p\sigma_k^k}, j = k, c_k^j(p) = -a_k^j e^{-p\sigma_k^j}, j \neq k$. Ако в допълнение имаме, че $\sigma_k^j = 0, j, k = 1, 2, \dots, n$, тогава характеристичната матрица е $G_0(p) = \{\tilde{c}_k^j(p)\}_{k,j=1}^n, \tilde{c}_k^j(p) = p^{\alpha_k} - a_k^k, j = k, \tilde{c}_k^j(p) = -a_k^j, j \neq k$, където матрицата $A = \{a_k^j\}_{k,j=1}^n$ е матрицата от коефициентите в скоковата част в лебеговата декомпозиция на ядрото $U(\theta)$. От (2.2.3.3) следва, че в тези случаи характеритичните уравнения добиват вида

$$detG_J(p) = 0 \tag{2.2.3.6}$$

$$detG_0(p) = 0. \tag{2.2.3.7}$$

Теорема 2.2.3.1. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условията на Лема 2.2.3.1 са в сила.*

2. $detG_0(0) > 0$ *и* $detG_0(p) \neq 0$ *за всяко* $p \in \Omega$, *където* Ω *е правоъгълника, дефиниран в Лема 2.2.3.1.*

3. $\min\limits_{|\omega|\leq s^*} |detG_J(i\omega)| > 0$, *където* s^* *е единствения корен на уравнение* (2.2.3.4).

4. *В лебеговата декомпозиция имаме, че* $\int\limits_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds \equiv 0$, $\Im(\theta) \equiv 0$ *за* $\theta \in [-\sigma, 0]$.

Тогава системата (2.2.3.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

Нека всяко $\alpha_k \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ в (2.2.3.1), т.е. $\alpha_k = \frac{l_k}{r_k} \in \mathbb{Q}$, $l_k, r_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и означим с m най-малкото общо кратно на знаменателите на всички α_k. Тогава след заместването $p = \lambda^m$ в (2.2.3.2) получаваме, че характеристичната матрица добива вида

$$G_{\mathbb{Q}}(p) = G_{\mathbb{Q}}(\lambda^m) = \{\lambda^{m\alpha_k} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{\theta\lambda^m} du_k^j(\theta)\}_{k,j=1}^n \tag{2.2.3.8}$$

и характеристичното уравнение (2.2.3.3) добива вида

$$detG_{\mathbb{Q}}(\lambda^m) = 0. \tag{2.2.3.9}$$

В случая, когато в допълление имаме, че $\sigma_k^j = 0, j,k = 1,2,\ldots,n$, характеристично уравнение добива полиномен вид

$$detG_{\mathbb{Q}}^0(\lambda^m) = det\{\bar{c}_k^j(\lambda)\}_{k,j=1}^n = 0, \tag{2.2.3.10}$$

където $c_k^j(\lambda) = \lambda^{m\alpha_k} - a_k^k, j = k, c_k^j(\lambda) = -a_k^j, j \neq k$.

Следствие 2.2.3.1. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условия 1,2 и 3 на Теорема 2.2.3.1 са в сила.*

2. $\alpha_k \in (0,1) \bigcap \mathbb{Q}, k = 1,2,\ldots,n$.

3. *Аргументите на всички корени* $\lambda_* = p_*^{\frac{1}{m}} \in \mathbb{C}$ *на уравнение* (2.2.3.9) *удовлетворяват условието* $|arg\lambda_*| > \frac{\pi m^{-1}}{2}$, *където* m *е най-малкото общо кратно на знаменателите на* $\alpha_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

Тогава системата (2.2.3.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

Следствие 2.2.3.2. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условия 1, 2 и 3 на Теорема 2.2.3.1 са в сила.*

2. $|detG_J(p)| \leq |detG(p)|$ *за всяко* $p \in \Omega$, *където* Ω *е правоъгълникът дефиниран в Лема 2.2.3.1.*

   Тогава системата (2.2.3.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

Глава III. Линейни системи с разпределени закъснения с дробни производни на Капуто.

3.1. Начална задача

3.1.1. Неутрални линейни дробни системи с разпределени закъснения

Разглеждаме неутралната система линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение, с рационално несъизмерими редове на диференциранията

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha_k}\Big[x_k(t) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta)d_\theta v_k^j(t,\theta)\Big] = \\ = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta) + f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.1.1.1}$$

където $D_{0+}^{\alpha_k}$ означава ${}_CD_{0+}^{\alpha_k}$ дробната производна на Капуто, $\alpha_k \in (0,1)$ са произволни, $\tau \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+,\ U, V : \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, V(t,\theta) = \{v_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n$,

$U(t,\theta) = \{v_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n$, $U(t,\cdot)$ и $V(t,\cdot)$ имат ограничена вариация върху $[-h,0], h = max(\sigma,\tau), t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ и $f_k \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R}), k = 1,2,\dots,n$.

Въвеждаме следните означения:

$X(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T, |X(t)| = \sum\limits_{k=1}^n |x_k(t)|,\ F(t) = (f_1(t),\dots,f_n(t))^T$,

$\alpha_m = \min(\alpha_1,...,\alpha_n), \quad \alpha_M = \max(\alpha_1,...,\alpha_n)$,

${}_CD_{0+}^{\alpha}X(t) = ({}_CD_{0+}^{\alpha_1}x_1(t),\dots,{}_CD_{0+}^{\alpha_n}x_n(t))^T$ за всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$. За $W : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, W(t,\theta) = \{w_j^i(t,\theta)\}_{i,j=1}^n$ означаваме $|W(t,\theta)| = \sum\limits_{k,j=1}^n |w_k^j(t,\theta)|$.

С $\mathfrak{C}$ означаваме Банаховото пространство на началните векторни функции

$\mathfrak{C} = \{\Phi : [-h,0] \to \mathbb{R}^n \ \ | \ \ \Phi(t) = (\phi_1(t),\dots,\phi_n(t))^T, \phi_k \in C([-h,0],\mathbb{R})$,

$k = 1,2,\dots,n\}$ с норма $||\Phi|| = \sup\limits_{t\in[-\sigma,0]} \sum\limits_{k=1}^n |\phi_k(t)| = \sup\limits_{t\in[-\sigma,0]} |\Phi(t)|$ и с $BV[a,b]$ линейното пространство на функциите $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ с ограничена вариация върху $[a,b] \subset \mathbb{R}, a \le b$, където $Var_{[a,b]}W(\cdot) = \sum\limits_{k,j=1}^n Var_{[a,b]}w_k^j(\cdot)$.

Казваме, че за ядрата $U,V : \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ условията (T) са изпълнени, ако:

(T1) Функциите $(t,\theta) \to U(t,\theta)$ и $(t,\theta) \to V(t,\theta)$ са измерими върху $(t,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и нормализирани така, че $U(t,\theta) = 0, V(t,\theta) = 0$ за $\theta \ge 0$, $U(t,\theta) = U(t,-\sigma)$ за $\theta \le -\sigma$ и $V(t,\theta) = V(t,-\tau)$ за $\theta \le -\tau$.

(T2) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ функциите $U(t,\theta)$ и $V(t,\theta)$ са непрекъснати от ляво в θ, съответно върху $(-\sigma,0)$ и $(-\tau,0)$.

(T3) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ функцията $U(t,\cdot) \in BV[-h,0]$ и съществува функция $z \in L_1^{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ такава, че $Var_{[-\sigma,0]}U(t,\cdot) \le z(t)$.

(T4) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ функцията $V(t,\cdot) \in BV[-h,0]$ и е равномерно неатомична в нула (виж [6]), т.е. за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta(\varepsilon) > 0$ такова, че $Var_{[-\delta,0]}V(t,\cdot) = \sum\limits_{k,j=1}^n Var_{[-\delta,0]}v_k^j(t,\cdot) < \varepsilon$.

(T5) За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ следните релации са в сила:
$\int\limits_{-\sigma}^0 |U(t,\theta) - U(t_*,\theta)|d\theta \to 0, \quad \int\limits_{-\tau}^0 |V(t,\theta) - V(t_*,\theta)|d\theta \to 0$, когато $t_* \to t$.

(T6) Лебеговата декомпозиция за ядрото $V(t,\theta)$ за $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ и $\theta \in [-h, 0]$ има вида:

$$V(t,\theta) = \tilde{\aleph}(t,\theta) + \int\limits_{-\tau}^{\theta} \tilde{B}(t,s)ds + \tilde{\Upsilon}(t,\theta),$$

където $\tilde{\aleph}(t,\theta) = \{\tilde{a}_k^j(t)H(\theta + \tau_k^j(t))\}_{k,j=1}^n$, $\tilde{A}(t) = \{\tilde{a}_k^j(t)\}_{k,j=1}^n \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена за $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$; $T(t) = \{\tau_k^j(t)\}_{k,j=1}^n \in C(\bar{\mathbb{R}}_+, \bar{\mathbb{R}}_+^{n\times n})$ и $H(t)$ е функцията на Хевисайд. За всяко $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ имаме, че
$\int\limits_{-\sigma}^{\theta} \tilde{B}(t,s)ds = \{\int\limits_{-\sigma}^{\theta} \tilde{b}_k^j(t,s)ds\}_{k,j=1}^n \in AC(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$,
$\tilde{\Upsilon}(t,\theta) = \{\tilde{g}_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n \in C(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [-h,0], \mathbb{R}_+^n)$ и $\tilde{B}(t,\theta) = \{\tilde{b}_k^j(t,\theta)\}_{k,j=1}^n$ е локално ограничена.

Разглеждаме системата (3.1.1.1) при начални условия

$$X(t) = \Phi(t), t \in [-h, 0], \Phi \in \mathfrak{C}. \tag{3.1.1.2}$$

Нека $J_\infty = [-h, \infty)$ и с $C(J_\infty, \mathbb{R}^n)$ означим реалното линейно пространство на всички непрекъснати функции $G : J_\infty \to \mathbb{R}^n$.

Дефиниция 3.1.1.1. *Векторната функция $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ е решение на начална задача (3.1.1.1), (3.1.1.2) върху J_∞, ако $X \in C(J_\infty, \mathbb{R}^n)$ удовлетворява системата (3.1.1.1) за $t \in \mathbb{R}_+$ и началното условие (3.1.1.2) за $t \in [-h, 0]$.*

Теорема 3.1.1.1. *Нека условията (T1)-(T6) са в сила и $F \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена.*

Тогава началната задача (3.1.1.1), (3.1.1.2) има единствено решение $X \in C(J_\infty, \mathbb{R}^n)$.

Следствие 3.1.1.1. *Нека условията на Теорема 3.1.1.1 са в сила.*

Тогава необходимо и достатъчно условие началната задача (2.1.1.1), (2.1.1.3) (с производни на Риман-Лиувил) да има единствено решение $X \in C(J_\infty, \mathbb{R}^n)$ е $\phi_k(0) = 0, k = 1, 2, \ldots, n$.

3.1.2. Линейни дробни системи от разпределен ред с разпределени закъснения

Разглеждаме линейна система дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция и с разпределени закъснения

$$D_{0+}^{q_k(\alpha)} x_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta) du_k^j(\theta) + f_k(t), \ t \geq 0, k = 1, 2, \dots, n, \tag{3.1.2.1}$$

където $D_{0+}^{q_k(\alpha)} = {}_C D_{0+}^{q_k(\alpha)}$ означава дробната производна от разпределен ред на Капуто относно дадената плътностна функция $q_k \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+, \bar{\mathbb{R}}_+), f_k \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}), k = 1, 2, \dots, n, \ \sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+, \alpha \in [0, 1]$. Нека $q(\alpha) = (q_1(\alpha), \dots, q_n(\alpha))$.

Казваме, че условията (D) са изпълнени, ако е в сила:

(D1) За ядрото $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ функцията $(\theta) \to U(\theta)$ е измерима в $\theta \in \mathbb{R}$ и нормализирана така, че $U(\theta) = 0$ за $\theta \geq 0$ и $U(\theta) = U(-\sigma)$ за $\theta \leq -\sigma$.

(D2) Ядрото $U(\theta)$ е непрекъснато от ляво върху $(-\sigma, 0)$ и $U \in BV[-\sigma, 0]$.

(D3) За плътностната функция $q(\alpha) = (q_1(\alpha), \cdots, q_n(\alpha))$ с $q_k \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+, \bar{\mathbb{R}}_+)$ и за всяко $k = 1, 2, \dots, n$, имаме, че $meas\{\alpha \in [0, 1] \mid q_k(\alpha) > 0\} > 0$.

Разглеждаме задачата на Коши за (3.1.2.1) при начални условия

$$x_k(t) = \phi_k(t), t \in [-\sigma, 0], \Phi \in \mathfrak{C}, k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.1.2.2}$$

Началната задача (3.1.2.1), (3.1.2.2) може да бъде пренаписана във вида

$$D_{0+}^{q(\alpha)} X(t) = \int_{-\sigma}^{0} [dU(t)] X(t+\theta) + F(t), \quad t \geq 0, \tag{3.1.2.3}$$

$$X(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\sigma, 0], \Phi \in \mathfrak{C}. \tag{3.1.2.4}$$

Допускаме, че условията (D) са в сила и разглеждаме системата

$$x_k(t) = x_k(0) + \int\limits_0^t (\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{Q_k(\cdot)})(t-\tau)[\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{-\sigma}^{0} x_j(\tau+\theta)du_k^j(\theta)]d\tau + \\ + \int\limits_0^t f_k(\tau)(\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{Q_k(\cdot)})(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \tag{3.1.2.5}$$

където $Q_k(p) = \int\limits_0^1 q_k(\alpha)p^\alpha d\alpha$ за $p \in \mathbb{C}_+, k = 1, 2, \dots, n$ и $\mathfrak{L}^{-1}$ е обратната трансформация на Лаплас.

Нека $M > 0$ и означим $J_M = [-\sigma, M], J_\infty = [-\sigma, \infty), C_M = C(J_M, \mathbb{R}^n)$ и $C_\infty = C(J_\infty, \mathbb{R}^n)$.

Дефиниция 3.1.2.1. *Векторната функция $X \in C_M(C_\infty)$ е решение на началната задача (3.1.2.1), (3.1.2.2) в $J_M(J_\infty)$, ако удовлетворява системата (3.1.2.1) за $t \in (0, M]$ ($t \in \mathbb{R}_+$) и началното условие (3.1.2.2) за $t \in [-\sigma, 0]$.*

Дефиниция 3.1.2.2. *Векторната функция $X \in C_M(C_\infty)$ е решение на началната задача (3.1.2.5), (3.1.2.2) в $J_M(J_\infty)$, ако удовлетворява системата (3.1.2.5) за $t \in (0, M]$ ($t \in \mathbb{R}_+$) и началното условие (3.1.2.2) за $t \in [-\sigma, 0]$.*

Лема 3.1.2.1. *Нека условия (D) са в сила, $F \in L_1^{loc}(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$ и съществува $\gamma > 0$ такова, че $F(t) = O(e^{\gamma t})$.*

Тогава всяко непрекъснато решение на системата (3.1.2.5), което удовлетворява условие (3.1.2.2), е решение на начална задача (3.1.2.1), (3.1.2.2).

Теорема 3.1.2.1. *Нека условията на Лема 3.1.2.1 са в сила.*

Тогава, ако за някое $\Phi \in \mathfrak{C}$ началната задача (3.1.2.1), (3.1.2.2) има непрекъснато решение, тогава това непрекъснато решение е единсвено.

Следствие 3.1.2.1. *Нека условията на Лема 3.1.2.1 са в сила.*

Тогава, ако за някое $\Phi \in \mathfrak{C}$ началната задача (3.1.2.5), (3.1.2.2) има непрекъснато решение, то това непрекъснато решение е единствено.

Теорема 3.1.2.2. *Нека условията на Лема 3.1.2.1 са в сила и $F \in C(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$.*

Тогава съществува $M > 0$ такова, че началната задача (3.1.2.5), (3.1.2.2) има единствено решение $X \in C_M$.

Следствие 3.1.2.2. *Нека условията на Теорема 3.1.2.2 са в сила.*

Тогава началната задача (3.1.2.5), (3.1.2.2) има единствено решение $X \in C_\infty$.

Следствие 3.1.2.3. *Нека условията на Теорема 3.1.2.2 са в сила.*

Тогава началната задача (3.1.2.1), (3.1.2.2) има единствено решение $X \in C_\infty$.

3.2. Устойчивост на автономни линейни дробни системи с разпределени закъснения

3.2.1. Устойчивост на автономни неутрални системи с разпределени закъснения

Разглеждаме автономната неутрална система

$$D_{0+}^{\alpha_k}[x_k(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta) dv_k^j(\theta)] = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta) du_k^j(\theta), k = 1, 2, \ldots, n, \quad (3.2.1.1)$$

където, както в (3.1.1.1) $D_{0+}^{\alpha_k}$ означава ${}_C D_{0+}^{\alpha_k}$ дробната производна на Капуто, $\alpha_k \in (0,1), \sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+, \tau \in \mathbb{R}_+, U, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, t \in \bar{\mathbb{R}}_+$, с начално условие (3.1.1.2).

Дефиниция 3.2.1.1. *Казваме, че системата (3.2.1.1) е:*

(а) *Устойчива, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta(\varepsilon) > 0$ и $t_* \in \bar{\mathbb{R}}_+$, такова, че за всяка начална функция $\Phi \in \mathfrak{C}$ с $||\Phi|| < \delta$ съответното решение $X(t)$ удовлетворява за $t \geq t_*$ неравенството $|X(t)| \leq \varepsilon$.*

(б) *Локално асимптотично устойчива, ако има $\Delta > 0$, такова, че за всяка начална функция $\Phi \in \mathfrak{C}$ с $||\Phi|| < \Delta$ за съответното решение $X(t)$ имаме $\lim_{t\to\infty} |X(t)| = 0$.*

(в) *Глобално асимптотично устойчива, ако за всяка начална функция $\Phi \in \mathfrak{C}$ за съответното решение $X(t)$ имаме, че $\lim_{t\to\infty} |X(t)| = 0$.*

Теорема 3.2.1.1. *Нека условия (T1)-(T4) са в сила.*

Тогава за всяко решение $X(t)$ на началната задача (3.2.1.1), (3.1.1.2) оценката

$$\max(\max_{s\in[t_0,t]}|X(s)|, X_0) \leq \sup_{t\geq t_0}(a(t))E_{\alpha_M}(C_0\Gamma(\alpha_M)t^{\alpha_M}) \tag{3.2.1.2}$$

е в сила за $t \geq t_0$, където $t_0 \in (h,\infty)$ е произволно, $X_0 = \max\limits_{s\in[t_0-h,t_0]}|X(s)|$, $C_0 = Var_{[-h,0]}U(\cdot)(1 - Var_{[-h,0]}V(\cdot))^{-1}$ и

$$a(t) = [|\Phi(0)|\max(\max_{s\in[t_0,t]}(s^{\alpha_m-1}, s^{\alpha_M-1}), X_0)+$$

$$+\frac{C_{t_0}^X}{\alpha_m}\max(\max_{s\in[t_0,t]}\sum_{k,j=1}^{n}|s^{\alpha_k} - (s-t_0)^{\alpha_k}|, X_0)](1 - Var_{[-h,0]}V(\cdot))^{-1}.$$

Нека означим $m_k^j(p) = \int\limits_{-\tau}^{0} e^{p\theta}dv_k^j(\theta)$ и $l_k^j(p) = \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta}du_k^j(\theta)$.

Дефиниция 3.2.1.2. *Матричната функция*

$$G(p) = \begin{pmatrix} p^{\alpha_1}[1-m_1^1(p)] - l_1^1(p) & -[p^{\alpha_1}m_1^2(p) + l_1^2(p)] & \dots & -[p^{\alpha_1}m_1^n(p) + l_1^n(p)] \\ -[p^{\alpha_2}m_2^1(p) + l_2^1(p)] & p^{\alpha_2}[1-m_2^2(p)] - l_2^2(p) & \dots & -[p^{\alpha_2}m_2^n(p) + l_2^n(p)] \\ \dots & & & \\ -[p^{\alpha_n}m_n^1(p) + l_n^1(p)] & -[p^{\alpha_n}m_n^2(p) + l_n^2(p)] & \dots & p^{\alpha_n}[1-m_n^n(p)] - l_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{3.2.1.3}$$

наричаме характеристична матрица за системата (3.2.1.1), а уравнението

$$det(G(p)) = 0 \tag{3.2.1.4}$$

характеристично уравнение.

Теорема 3.2.1.2. *Нека условията (T1)-(T4) бъдат изпълнени и всички корени на характеристичното уравнение (3.2.1.4) имат отрицателни реални части.*

Тогава системата (3.2.1.1) е глобално асимптотично устойчиво.

Нека предположим, че всички $\alpha_k \in (0,1)$ са рационални числа, т.е. $\alpha_k = \frac{l_k}{r_k}, l_k, r_k \in \mathbb{N}, k = 1,2,\dots,n$, и Δ е най-малкото общо кратно на знаменателите на всички α_k и $\lambda = p^{\frac{1}{\Delta}}, p \in \mathbb{C}$. Нека означим $m_k^j(p) = \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\theta\lambda^\Delta}dv_k^j(\theta)$ и $l_k^j(p) = \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{\theta\lambda^\Delta}du_k^j(\theta)$. Тогава от (3.2.1.3) следва, че характеристичната матрица има вида

$$G(p) = \Gamma(\lambda^\Delta) = \begin{pmatrix} \lambda^{\alpha_1\Delta}[1-m_1^1(p)] - l_1^1(p) & \dots & -l_1^n(p) \\ \dots & & \\ l_n^1(p) & \dots & \lambda^{\alpha_1\Delta}[1-m_n^n] - l_n^n \end{pmatrix} \tag{3.2.1.5}$$

и от (3.2.1.4) следва, че характеристичното уравнение има вида

$$det(G(p)) = det(\Gamma(\lambda^\Delta)) = 0. \tag{3.2.1.6}$$

Следствие 3.2.1.1. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условията (T1)-(T4) са в сила.*

2. *Нека* $\alpha_k = \frac{l_k}{r_k}, l_k, r_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \ldots, n$ *и* Δ *е най-малкото общо кратно на знаменателите на всички* α_k.

3. *За всички корени на уравнението* (3.2.1.6) *имаме, че* $|arg(\lambda)| > \frac{\pi\Delta^{-1}}{2}$.

Тогава системата (3.2.1.1) *е глобално асимптотично устойчиво.*

3.2.2. Експлицитни условия за уствойчивост на неутрални дробни системи с разпределени закъснения

Нека означим $m_j^k(p) = p \int\limits_{-\tau}^{0} e^{p\theta} dv_j^k(\theta) + p^{1-\alpha_j} \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_j^k(\theta)$.

Дефиниция 3.2.2.1. *Матричната функция* $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} m_1^1(p) & \ldots & m_1^n(p) \\ \ldots & & \\ m_n^1(p) & \ldots & m_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{3.2.2.1}$$

ще бъде наричана асоциирана характеристична матрица за системата (3.2.1.1).

Лема 3.2.2.1. *Нека условията (T1)-(T4) са в сила.*

Тогава комплексното число $p_* \in \mathbb{C}, p_* \neq 0$ *е собствена стойност на асоциираната характеристична матрица* $\Phi(p_*)$ *тогава и само тогава, когато* p_* *е корен на характеристичното уравнение* $det(G(p)) = 0$.

Лема 3.2.2.2. *Нека (T1)-(T4) са в сила,* $Var_{[-h,0]}V(\cdot) < 1$ *и* $Var_{[-h,0]}U(\cdot) > 0$.

Тогава съществува $s^* \in \mathbb{R}_+$ *такова, че за всяко* $p \in \mathbb{C}$ *с* $Re\ p > s^*$ *имаме, че* $det(G(p)) \neq 0$.

Лема 3.2.2.3. *Нека условията на Лема 3.2.2.2 са изпълнени.*

Тогава съществува $s^* \in \mathbb{R}_+$ *такова, че за всяко* $p \in \bar{\mathbb{C}}_+$ *с* $|Im\ p| > s^*$ *имаме, че* $det(G(p)) \neq 0$*, където точката* s^* *е единствен корен на уравнението* (2.2.2.2).

Забележка 3.2.2.1. *От Лема 3.2.2.2 и Лема 3.2.2.3 следва, че всички корени на характеристичното уравнение* $det(G(p)) = 0$ *с неотрицателни реални части принадлежат на правоъгълника*

$$\Omega = \{p = \gamma + i\omega \in \mathbb{C} \ \mid \ 0 \le \gamma \le s^*, \ \ 0 \le |\omega| \le s^*\},$$

където точката s^* *е единствен корен на уравнението* (2.2.2.2).*Следователно характеристичното уравнение* $det(G(p)) = 0$ *има само краен брой корени в* $\bar{\mathbb{C}}_+$.

Теорема 3.2.2.1. *Нека условията (T1)-(T4) са в сила,* $\mu(\Phi(p)) < 0$ *за всяко* $p \in \Omega \setminus \{0\}$ *и* $det(G(0)) > 0$.

Тогава системата (3.2.1.1) *е глобално асимптотично устойчиво.*

3.2.3. Експлицитни условия за устойчивост на автономни линейни системи с разпределени закъснения

Разглеждаме автономната линейна система

$$D_{0+}^{\alpha_k} x_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\sigma}^{0} x_j(t+\theta) du_k^j(\theta), k = 1, 2, \dots, n, \tag{3.2.3.1}$$

където $D_{0+}^{\alpha_k}$ означава ${}_C D_{0+}^{\alpha_k}$ дробната производна на Капуто, $\alpha_k \in (0, 1)$,
$\sigma \in \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$ и $n \ge 2$.

Казваме, че за ядрото $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ условията (E) са изпълнени ако е в сила:

(E1) Функцията $U \in BV[\sigma, 0]$ и е нормализирана, така че $U(0) = 0, U(\theta) = 0$ за $\theta \ge 0$, $U(\theta) = U(-\sigma)$ за $\theta \le -\sigma$.

(E2) Ядрото $U(\theta)$ е непрекъснато от ляво в θ върху $(\sigma, 0)$.

(E3) Лебеговата декомпозиция за ядрото $U(\theta)$ за $\theta \in [-\sigma, 0]$ има вида:
$U(\theta) = \aleph(\theta) + \int_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds + \Im(\theta)$, където $\aleph(\theta) = \{a_k^j H(\theta + \sigma_k^j)\}_{k,j=1}^n$,
$\sigma_k^j \in [0, \sigma], 1 \le j, k \le n, A = \{a_k^j\}_{k,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $H(t)$ е функцията на Хевисайд. $\int_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds = \{\int_{-\sigma}^{\theta} b_k^j(s)ds\}_{k,j=1}^n \in AC([-h, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$ и
$\Im(\theta) = \{g_k^j(\theta)\}_{k,j=1}^n \in C([-h, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$.

Дефиниция 3.2.3.1. *Матричната функция*

$$G(p) = \begin{pmatrix} p^{\alpha_1} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_1^1(\theta) & -\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_1^2(\theta) & \dots & -\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_1^n(\theta) \\ -\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_2^1(\theta) & p^{\alpha_2} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_2^2(\theta) & \dots & -\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_2^n(\theta) \\ \dots & & & \\ -\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_n^1(\theta) & -\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_n^2(\theta) & \dots & p^{\alpha_n} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_n^n(\theta) \end{pmatrix} \tag{3.2.3.2}$$

наричаме характеристична матрица за системата (3.2.3.1), *а уравнението*

$$det(G(p)) = 0 \tag{3.2.3.3}$$

характеристично уравнение.

Лема 3.2.3.1. *Нека условията E са в сила и $Var_{[-h,0]}U(\cdot) > 0$.*

Тогава всички корени на характеристичното уравнение (3.2.3.3) *с неотрицателни реални части принадлежат на правоъгълника*

$$\Omega = \{p = \gamma + i\omega \in \mathbb{C} | 0 \le \gamma \le s^*, 0 \le |\omega| \le s^*\},$$

където $s^* \in \mathbb{R}$ е единствен корен в $\mathbb{R}_+$ на уравнението

$$h(s) = min(s^{\alpha_m}, s^{\alpha_M}) - Var_{[-h,0]}U(\cdot) = 0. \tag{3.2.3.4}$$

Разглеждаме първо частния случай, когато в условие (E3) имаме, че $\int\limits_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds \equiv 0, \Im(\theta) \equiv 0$ за $\theta \in [-\sigma, 0]$. Тогава от (3.2.3.2) следва, че характеристичната матрица има вида

$$G_J(p) = \begin{pmatrix} p^{\alpha_1} - a_1^1 e^{-p\sigma_1^1} & -a_1^2 e^{-p\sigma_1^2} & \dots & -a_1^n e^{-p\sigma_1^n} \\ a_2^1 e^{-p\sigma_2^1} & p^{\alpha_2} - a_2^2 e^{-p\sigma_2^2} & \dots & -a_2^n e^{-p\sigma_2^n} \\ \dots & & & \\ a_n^1 e^{-p\sigma_n^1} & -a_n^2 e^{-p\sigma_n^2} & \dots & p^{\alpha_n} - a_n^n e^{-p\sigma_n^n} \end{pmatrix}, \tag{3.2.3.5}$$

т.е. $G_J(p) = \{c_k^j(p)\}_{k,j=1}^n$, където $c_k^j(p) = p^{\alpha_k} - a_k^k e^{-p\sigma_k^k}, j = k, c_k^j(p) = -a_k^j e^{-p\sigma_k^j}, j \neq k$. Ако в допълнение имаме, че $\sigma_k^j = 0, j, k = 1, 2, \dots, n$, тогава характеристичната матрица е $G_0(p) = \{\tilde{c}_k^j(p)\}_{k,j=1}^n, \tilde{c}_k^j(p) = p^{\alpha_k} - a_k^k, j = k, \tilde{c}_k^j(p) = -a_k^j, j \neq k$, където матрицата $A = \{a_k^j\}_{k,j=1}^n$ е матрицата от коефициентите в скоковата част в лебеговата декомпозиция на ядрото $U(\theta)$. От (3.2.3.3) следва, че в тези случаи характеритичните уравнения добиват вида

$$detG_J(p) = 0 \tag{3.2.3.6}$$

$$detG_0(p) = 0. \tag{3.2.3.7}$$

Теорема 3.2.3.1. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условията на Лема 3.2.3.1 са в сила.*

2. $detG_0(0) > 0$ *и* $detG_0(p) \neq 0$ *за всяко* $p \in \Omega$, *където* Ω *е правоъгълника, дефиниран в Лема 3.2.3.1.*

3. $\min\limits_{|\omega| \leq s^*} |detG_J(i\omega)| > 0$, *където* s^* *е единствения корен на уравнение* (3.2.3.4).

4. *В лебеговата декомпозиция имаме, че* $\int\limits_{-\sigma}^{\theta} B(s)ds \equiv 0$, $\Im(\theta) \equiv 0$ *за* $\theta \in [-\sigma, 0]$.

Тогава системата (3.2.3.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

Нека всяко $\alpha_k \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ в (3.2.3.1), т.е. $\alpha_k = \frac{l_k}{r_k} \in \mathbb{Q}$, $l_k, r_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \ldots, n$ и m е най-малкото общо кратно на знаменателите на всяко α_k. Тогава от заместването $p = \lambda^m$ в (3.2.3.2) получаваме, че характеристичната матрица добива вида

$$G_{\mathbb{Q}}(p) = G_{\mathbb{Q}}(\lambda^m) = \{\lambda^{m\alpha_k} - \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{\theta\lambda^m} du_k^j(\theta)\}_{k,j=1}^n. \tag{3.2.3.8}$$

и характеристичното уравнение (3.2.3.3) добива вида

$$detG_{\mathbb{Q}}(\lambda^m) = 0 \tag{3.2.3.9}$$

В случая, когато в допълнение имаме, че $\sigma_k^j = 0, j, k = 1, 2, \ldots, n$, характеристично уравнение добива полиномен вид

$$detG^0_{\mathbb{Q}}(\lambda^m) = det\{\bar{c}_k^j(\lambda)\}_{k,j=1}^n = 0, \tag{3.2.3.10}$$

където $c_k^j(\lambda) = \lambda^{m\alpha_k} - a_k^k, j = k, c_k^j(\lambda) = -a_k^j, j \neq k$.

Следствие 3.2.3.1. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условия 1,2 и 3 на Теорема 3.2.3.1 са в сила.*

2. $\alpha_k \in (0,1) \bigcap \mathbb{Q}, k = 1, 2, \ldots, n$.

3. *Аргументите на всички корени* $\lambda_* = p_*^{\frac{1}{m}} \in \mathbb{C}$ *на уравнение* (3.2.3.9) *удовлетворяват условието* $|arg\lambda_*| > \frac{\pi m^{-1}}{2}$, *където* m *е най-малкото общо кратно на знаменателите на всяко* $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Тогава системата (3.2.3.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

Следствие 3.2.3.2. *Нека следните условия са изпълнени:*

1. *Условия 1, 2 и 3 на Теорема 3.2.3.1 са в сила.*

2. $|detG_J(p)| \leq |detG(p)|$ *за всяко* $p \in \Omega$, *където* Ω *е правоъгълника, дефиниран в Лема* (3.2.3.1).

   Тогава системата (3.2.3.1) *е глобално асимптотично устойчива.*

3.2.4. Устойчивост на автономни линейни дробни системи от разпределен ред с разпределени закъснения

Изследваме устойчивостта на системата (3.1.2.1) в случая, когато $F(t) \equiv 0, t \in \bar{\mathbb{R}}_+$

$$D_{0+}^{q(\alpha)} X(t) = \int_{-\sigma}^{0} [dU(\theta)] X(t+\theta). \qquad (3.2.4.1)$$

Нека означим $m_k^j(p) = \int_{-\sigma}^{0} e^{p\theta} du_k^j(\theta)$.

Дефиниция 3.2.4.1. *Матричната функция*

$$G_Q(p) = \begin{pmatrix} Q_1(p) - m_1^1(p) & -m_1^2(p) & \dots & -m_1^n(p) \\ -m_2^1(p) & Q_2(p) - m_2^2(p) & \dots & -m_2^n(p) \\ \dots & & & \\ -m_n^1(p) & -m_n^2(p) & \dots & Q_n(p) - m_n^n(p) \end{pmatrix} \qquad (3.2.4.2)$$

наричаме характеристична матрица за системата (3.2.4.1), *а уравнението*

$$det(G_Q(p)) = 0 \qquad (3.2.4.3)$$

характеристично уравнение.

Теорема 3.2.4.1. *Нека условията на Теорема 3.1.2.2 са в сила и всички корени на характеристичното уравнение* (3.2.4.3) *имат отрицателни реални части.*

Тогава нулевото решение на (3.2.4.1) *е глобално асимптотично устойчиво.*

Заключение

Считам, че поставената цел е постигната. Развита е качествената теория на системи дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение.

Получените резултати представляват и основните приноси в дисертацията:

1. Намерени са на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за неутрални системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение за случаите, когато дробните производни в системите са на Риман-Лиувил или Капуто, с рационално несъизмерими редове на диференциранията (Следствие 2.1.1.2 на Теорема 2.1.1.1 и Теорема 3.1.1.1).

2. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за линейни системи дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция и с разпределени закъснения, като разпределените дробни производни са базирани на дробната производна на Капуто (Следствие 3.1.2.3 на Теорема 3.1.2.2).

3. Намерени са достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни неутрални системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, в случаите, когато дробните производни в системите са на Риман-Лиувил или Капуто, с рационално несъизмерими редове на диференциранията (Теореми 2.2.1.2 и 3.2.1.2).

4. Установени са експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни неутрални системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, в случаите, когато дробните производни в системите са на Риман-Лиувил или Капуто, с рационално несъизмерими редове на диференциранията (Те-

ореми 2.2.2.1 и 3.2.2.1).

5. Намерени са достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни линейни системи дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция и с разпределени закъснения, като разпределените дробни производни са базирани на дробната производна на Капуто (Теорема 3.2.4.1).

6. Установени са експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни линейни системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения, в случаите на дробни производни на Риман-Ливул или Капуто, с рационално съизмерими или несъизмерими редове на диференциранията (Следствия 2.2.3.1 и 2.2.3.2 на Теорема 2.2.3.1, Следствия 3.2.3.1 и 3.2.3.2 на Теорема 3.2.3.1).

Като възможности за развитие виждам обобщаване на някои от получените резултати за дробни диференциални уравнения с импулси.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1	1	А	2.1.1, 3.1.1	1, 2.
2	1	Б	3.1.2	
3	1	В	2.2.1, 3.2.1	1, 2, 4.
4	1	Г	2.2.2, 3.2.2	4.
5	1	Д	3.2.4	
6	1	Е	2.2.3, 3.2.3	3.

Апробация на резултатите

Част от получените резултати, са използвани в:

- Научен проект НИ15 ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: "Иновативни фундаментални и приложни научни изследвания по компютърни науки, математика и педагогика на обучението", 2015-2016.

Част от получените резултати, са докладвани на:

- Международна конференция за съвременните постижения в чистата и приложна математика (Int. Conf. on Recent Advances in Pure and Applied Math ICRAPAM 2015), Истанбул - Турция, 3-6 юни 2015 г.

- 41-ва Конференция "Приложение на математиката в техниката и икономиката"(41st International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics - AMEE'15), Созопол, 8 – 13 юни 2015 г.

- 42-ра Конференция "Приложение на математиката в техниката и икономиката"(42nd International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics - AMEE'16), Созопол, 8 – 13 юни 2016 г.

Благодарности

Бих искала да изразя голямата си признателност към моя научен ръководител доц. д-р Христо Кискинов за всестранната подкрепа. Изказвам специални благодарности на проф. д-р Андрей Захариев и проф. д.м.н. Степан Костадинов за компетенстната им помощ. Благодаря на деканското ръководство и всички колеги, помогнали ми по един или друг начин.

Публикации по дисертационния труд

1. [20] M. Veselinova, H. Kiskinov, A. Zahariev, Stability analysis of linear fractional differential system with distributed delays, AIP Conference Proceedings, 1690, 040013 (2015), ISBN: 978-0-7354-1337-5, (SJR 2014 = 0.152).

2. [21] M. Veselinova, H. Kiskinov, A. Zahariev, Stability analysis of neutral linear fractional system with distributed Delays, Filomat 30, No 3 (2016), 841–851, ISSN: 0354-5180, (IF 2014 = 0.638), (SJR 2015 = 0.487).

3. [23] M. Veselinova, H. Kiskinov, A. Zahariev, About stability conditions for retarded fractional differential systems with distributed delays, Communications in Applied Analysis

20, No 3 (2016), 325-334, ISSN: 1083-2564, (SJR 2015 = 0.117).

4. [22] M. Veselinova, H. Kiskinov, A. Zahariev, Explicit conditions for stability of neutral linear fractional system with distributed delays, AIP Conference Proceedings, 1789, 040005 (2016), ISBN: 978-0-7354-1453-2, (SJR 2014 = 0.152).

Литература

[1] Aminikhah H., Refahi Sheikhani A., Rezazadeh H., Stability Analysis of Linear Distributed Order System with Multiple Time Delays, UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics, Vol 77 (2015), No. 2, 207-218, ISSN: 1223-7027.

[2] Bonsall F.F., Duncan J., Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and Elements of Normed Algebras, Cambridge University Press, London, (1971), ISBN: 9780521079884.

[3] Chen Y.Q., Moore K.L., Analytical Stability Bound for a Class of Delayed Fractional-Order Dynamic Systems, Nonlinear Dynamics, Vol 29 (2002), No. 1, 191-200, ISSN: 1573-269X.

[4] Das Sh., Functional Fractional Calculus, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2011), ISBN: 978-3-642-20545-3.

[5] Deng W., Li Ch., Lu J., Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, Nonlinear Dynamics, Vol 48 (2007), No. 4, 409-416, ISSN: 1573-269X.

[6] Hale J., Lunel S., Introduction to Functional Differential Equations, Springer - Verlag, New York, (1993), ISBN 978-1-4612-4342-7.

[7] Hwang C., Cheng Y. C., A note on the use of the Lambert W function in the stability analysis of time-delay systems, Automatica, Vol 41 (2005), No. 11, 1979-1985, ISSN: 0005-1098.

[8] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2006, ISBN-13: 978-0-444-51832-3.

[9] Kiryakova V., Generalized Fractional Calculus and Applications, Longman Scientific and Technical, Harlow, copublished in the United States with John Wiley and Sons, Inc., New York (1994), ISBN: 0-582-21977-9.

[10] Lazarevic M.P., Spasic A.M., Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems: Gronwall's approach, Mathematical and Computer Modelling, Vol 49 (2009), 475-481, ISSN: 0895-7177.

[11] Li C., Zhang F., A survey on the stability of fractional differential equations, The European Physical Journal Special Topics, Vol 193 (2011), 27-47, ISSN: 1951-6401.

[12] Matignon D., Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire. Thèse de Doctorat, discipline Automatique et Traitement du Signal, Univ. Paris XI, Novembre 1994.

[13] Myshkis A., Linear Differential Equations with Retarded Argument, Nauka, Moscow, (1972), (in Russian).

[14] Najafi H. S., Sheikhani A. R., Ansari A., Stability analysis of distributed order fractional differential equations, Abstract and Applied Analysis, Article ID 175323, 12 pages, (2011), ISSN: 1687-0409.

[15] Oldham K. B., Spainer J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974, ISBN: 0-12-525550-0.

[16] Podlubny I., Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999, ISBN: 0-12-558840-2.

[17] Qian D., Li Ch., Agarwal R., Wong P., Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative, Mathematical and Computer Modeling, Vol(52) (2010), 862-874, ISSN: 0895-7177.

[18] Sheikhani A.R., Ansari A., Saberi Najafi H., Mehrdoust F., Analytic study on linear systems of Distributed Order Fractional Differential Equations, Le Matematiche, Vol 67 (2012), No 2, 3-13, ISSN: 0373-3505.

[19] Soederlind G., The logarithmic norm. History and modern theory, BIT Numerical Mathematics, Vol 46, (2006), No. 3, 631-652 ISSN: 1572-9125.

[20] Veselinova M., Kiskinov H., Zahariev A., Stability analysis of linear fractional differential system with distributed delays, AIP Conference Proceedings, 1690, 040013 (2015), ISBN: 978-0-7354-1337-5.

[21] Veselinova M., Kiskinov H., Zahariev A., Stability analysis of neutral linear fractional system with distributed Delays, Filomat, Vol 30 (2016), 841–851, ISSN: 0354-5180.

[22] Veselinova M., Kiskinov H., Zahariev A., Explicit conditions for stability of neutral linear fractional system with distributed delays, AIP Conference Proceedings, 1789, 040005 (2016), ISBN: 978-0-7354-1453-2.

[23] Veselinova M., Kiskinov H., Zahariev A., About stability conditions for retarded fractional differential systems with distributed delays, Communications in Applied Analysis 20, No 3 (2016), 325-334, ISSN: 1083-2564.

[24] Xiong L., Zhao Y., Jiang T., Stability analysis of linear fractional order neutral system with multiple delays by algebraic approach, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol 5 (2011), No 5, 758–761, ISSN: 2010376X.